Функциональный анализ и его приложения,
т. 8, вып. 2, 1974, 75—76.

ФАКТОРКОНИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ КОМПЛЕКСНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

И. В. Долгачев

В настоящей заметке предлагается одна конструкция двумерных особенностей, обобщающая известное построение двойных рациональных точек с помощью групп правильных многогранников [4]. Я благодарен В. И. Арнольду, обратившему мое внимание на аналогию между связью уравнения $z^2+x^3+y^5=0$ с группой икосаэдра PSL $(2, \mathbf{F}_5)$ и уравнения $z^2+x^3+y^7=0$ с группой PSL $(2, \mathbf{F}_7)$, замеченную Клейном[2].

1. Под особенностью мы понимаем здесь росток (X, x) нормальной аналитической комплексной поверхности.

Пусть $X \hookrightarrow \mathbf{P}^n$ — нормальное вложение неособой проективной алгебраической кривой, $C_X \subset \mathbf{C}^{n+1}$ — соответствующий проектирующий аффинный конус, $G \subset GL(n+1, \mathbf{C})$— конечная линейная группа, оставляющая C_X инвариантным. В силу результатов А. Картана фактор-пространство C_X/G является нормальной аналитической поверхностью, а образ x_0 вершины $o \in \mathbf{C}^{n+1}$ при естественной проекции $C_X \to C_X/G$ — его единственно возможная особая точка. Особенность, аналитически изоморфную ростку $(C_X/G, x_0)$, назовем *факторконической.*

Пример. Пусть X — не гиперэллиптическая кривая рода $g>1$, $X \hookrightarrow \mathbf{P}^{g-1}$ — ее каноническое вложение (определяемое голоморфными 1-формами на X), G — подгруппа группы Aut (X). В этом случае $C_X \subset \mathbf{C}^g$ и G естественным образом точно действует в $\mathbf{C}^g$, оставляя C_X инвариантным (надо отождествить $\mathbf{C}^g$ с пространством голоморфных 1-форм). В этом частном случае факторконическую особенность, изоморфную ростку $(C_X/G, x_0)$, назовем *канонической особенностью типа* (X, G).

Например, пусть X — кривая Клейна рода 3, каноническое вложение которой задается уравнением $x_0^3x_1+x_1^3x_2+x_2^3x_0=0$. Возьмем за G всю группу Aut $(X) \simeq$ PSL $(2, \mathbf{F}_7)$ (порядок ее равен 168 — максимально возможный порядок группы автоморфизмов алгебраической кривой рода 3). Тогда, используя теорию инвариантов (см. [2]), можно показать, что соответствующая каноническая особенность задается уравнением $z^2+x^3+y^7=0$.

2. Напомним, что *разрешением* нормальной аналитической поверхности V с особой точкой x_0 называется такой морфизм $f: V' \to V$ неособой аналитической поверхности, что он собствен и его ограничение на $V' \setminus f^{-1}(x_0)$ является изоморфизмом. Разрешение называется *минимальным*, если кривая $f^{-1}(x_0)=\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$, где E_i — неприводимы и полны, обладает следующими свойствами: а) E_i неособые; б) $E_i \cap E_j \cap E_k=\phi$ для любых попарно различных индексов i, j, k; в) пересечение E_i с E_j в любой точке трансверсально; г) если существует кривая E_i, которая рациональна и $(E_i^2)=-1$, то ее стягивание в неособую точку определяет разрешение $f': V'' \to V$, не удовлетворяющее одному из свойств а) — в).

Хорошо известно, что минимальное разрешение существует и определяется однозначно.

Каждое минимальное разрешение определяет неориентированный *граф разрешения* $\Gamma=(A, S)$ по следующему правилу: $E_i \to$ вершина $v_i \in A$, точка из $E_i \cap E_j \to$ ребро $(v_i, v_j) \in S$. Этот граф можно считать взвешенным, если поставить в соответствие вершине v_i пару чисел (a_i, g_i), где $a_i=-(E_i^2)$, g_i — род E_i. Если $g_i=0$, то иногда вместо пары чисел (a_i, g_i) ставят в соответствие только число a_i.

Взвешенный граф $\overset{a_1}{\bullet}-\overset{a_2}{\bullet}-\bullet\cdots\bullet-\overset{a_{k-1}}{\bullet}-\overset{a_k}{\bullet}$ назовем *цепью типа* (n, q), если
$$\frac{n}{q}=a_1-\cfrac{1}{a_2-\cdot_{\cdot_{\cdot}-\cfrac{1}{a_{k-1}-\cfrac{1}{a_k}}}}.$$
Назовем взвешенный граф $\Gamma=(A, S)$ *звездой типа* $(b, g;\ n_1, q_1;\ \ldots;\ n_r, q_r)$, если существует вершина v_0 с весом (b, g) такая, что $\Gamma \setminus \{v_0\}$ либо пусто, либо есть несвязное объединение цепей типа (n_i, q_i).

Теорема 1. *Граф разрешения факторконической особенности является звездой. Если, кроме того, особенность является канонической, то соответствующая* *звезда имеет тип*

$$(b,\ g;\ n_1,\ 1;\ \ldots;\ n_r,\ 1),\ \text{где}\ b = 2g - 2 + r > \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i}.$$

Доказательство теоремы использует метод Брискорна разрешения фактор-особенностей [3].

3. Пусть Δ — треугольник на плоскости Лобачевского Λ_2 с углами $\frac{\pi}{n_1}, \frac{\pi}{n_2}, \frac{\pi}{n_3}$, где n_i — целые. Группа $\Gamma = \langle n_1, n_2, n_3\rangle$ движений Λ_2, порожденная отражениями относительно сторон Δ, содержит инвариантную подгруппу Γ' конечного индекса, которая действует без неподвижных точек на Λ_2, и фактор Λ_2/Γ' является компактной римановой поверхностью X. Существует канонический морфизм $X \to \mathbf{P}^1 = \Lambda_2/\Gamma$, который является конечным накрытием Галуа со схемой ветвления (n_1, n_2, n_3). Группа Галуа $G = \mathrm{Aut}\,(X/\mathbf{P}^1) \simeq \Gamma/\Gamma'$.

Теорема 2. *Кривая X в конструкции выше не является гиперэллиптической, имеет род $g > 1$, а каноническая особенность типа (X, G) не зависит (с точностью до изоморфизма) от выбора подгруппы Γ'.*

Назовем особенность, определенную в предыдущей теореме, *канонической треугольной особенностью типа* (n_1, n_2, n_3).

Теорема 3. *Особенность изоморфна канонической треугольной особенности типа (n_1, n_2, n_3), если и только если ее граф разрешения является звездой типа $(1,\ 0;\ n_1,\ 1;\ n_2,\ 1;\ n_3,\ 1)$, где $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} < 1$.*

Пример. Локальные линии уровня исключительной серии унимодальных критических точек Арнольда (см. [1]) являются каноническими треугольными особенностями. Соответствующие типы даются следующей таблицей:

Q_{10}	Q_{11}	Q_{12}	Z_{11}	Z_{12}	Z_{13}	S_{11}
(2,3,9)	(2,4,7)	(3,3,6)	(2,3,8)	(2,4,6)	(3,3,5)	(2,5,6)
S_{12}	W_{12}	W_{13}	K_{12}	K_{13}	K_{14}	U_{12}
(3,4,5)	(2,5,5)	(3,4,4)	(2,3,7)	(2,4,5)	(3,3,4)	(4,4,4)

4. Замечания. 1. Каждая особенность с $\mathbf{C}^*$-действием в смысле [5] является факторконической. Разрешение таких особенностей было получено (loc. cit). 2. Особенности из таблицы являются единственными каноническими треугольными особенностями, которые можно задать одним уравнением. 3. Утверждение, обратное к теореме 1, вообще говоря, неверно. 4. Классификация рациональных факторконических особенностей включает классификацию фактор-особенностей [3]. 5. Тройки чисел в таблице отличаются, вообще говоря, от соответствующих троек, связанных с квадратичной формой или показателями однородности критических точек (см. [1]).

Московский институт
электронного машиностроения

Поступило в редакцию
26 ноября 1973 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., УМН XXVIII, вып. 5 (1973), 17—44. 2. Клейн Ф., Лекции о развитии математики в XIX столетии, М., ОНТИ, 1937. 3. Brieskorn E., Invent. Math. 4 (1968), 336—358. 4. Hirzebruch F., Sem. Bourbaki, 1962/63, № 250. 5. Wagreich P., Orlik P., Ann. Math. 93, № 2 (1971), 205—228.