Функциональный анализ и его приложения,
т. 9, вып. 2, 1975, 67—68.

АВТОМОРФНЫЕ ФОРМЫ И КВАЗИОДНОРОДНЫЕ ОСОБЕННОСТИ

И. В. Долгачев

В этой заметке анонсируются некоторые результаты, связанные с вариантом и обобщением одной конструкции нормальных особенностей с $\mathbf{C}^*$-действием (см. [3]).

1. Определение. Пусть U — односвязное комплексное многообразие. Γ — группа аналитических автоморфизмов многообразия U, L — одномерное векторное Γ-расслоение на U (см. [8]). *Автоморфной формой веса k относительно L* называется сечение $\varphi \in H^0(U, L^{\otimes k})^\Gamma$ k-й тензорной степени Γ-расслоения L, инвариантное относительно естественного действия Γ. Градуированная $\mathbf{C}$-алгебра $A(L) = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} H^0(U, L^{\otimes k})^\Gamma$ называется *алгеброй автоморфных форм относительно L.*

Теорема 1. *Предположим, что тройка (U, Γ, L) допустима в том смысле, что выполняются следующие условия:*

Д1. *Существует нормальный делитель конечного индекса $\Gamma' \subset \Gamma$, действующий свободно и дискретно на U.*

Д2. *Фактор-пространство U/Γ является компактным аналитическим пространством.*

Д3. *Для некоторой подгруппы $\Gamma' \subset \Gamma$ с условием Д1 фактор L/Γ' определяет положительное в смысле Кодаиры одномерное векторное расслоение на многообразии U/Γ'.*

При этих условиях алгебра автоморфных форм $A(L)$ является нормальной $\mathbf{C}$-алгеброй конечного типа размерности $\dim U + 1$ с неотрицательной градуировкой.

2. Определение. Аффинное алгебраическое многообразие X над алгебраически замкнутым полем k называется *квазиконусом*, если на X эффективно действует одномерный алгебраический тор $\mathbf{G}_m$ и существует единственная точка $x_0 \in X$, принадлежащая замыканию любой орбиты. Точка x_0 называется *вершиной* квазиконуса X.

Предложение. *Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие над k. Следующие условия эквивалентны:*

1) *X — квазиконус;*

2) *координатное кольцо $k[X]$ обладает неотрицательной градуировкой и $k[X]_0 \simeq k$;*

3) *существует замкнутое вложение $j\colon X \to k^n$ такое, что $j(X)$ инвариантно относительно действия $\mathbf{G}_m$ на k^n, определяемого формулой $(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1 t^{q_1}, \ldots, x_n t^{q_n})$, где $t \in \mathbf{G}_m(k)$, а $q_1, \ldots, q_n$ — целые положительные числа;*

4) *существует вложение $j\colon X \to k^n$ такое, что идеал, задающий $j(X)$, порожден взвешенно-однородными многочленами с положительными рациональными весами* [4].

Доказательство этого предложения основано на стандартных рассуждениях о действиях алгебраических торов на аффинных многообразиях (ср. [9]).

Теорема 2. *Пусть (U, Γ, L) — допустимая тройка. Тогда аффинное алгебраическое многообразие $\operatorname{Spec} A(L)$ является нормальным квазиконусом с вершиной x_0, определяемой максимальным идеалом $A(L)_+ = \bigoplus_{i>0} A(L)_i$. Наоборот, каждый нормальный двумерный квазиконус изоморфен многообразию $\operatorname{Spec} A(L)$ для некоторой допустимой тройки (U, Γ, L).*

В то время как первая часть теоремы сразу же следует из предыдущих результатов, доказательство второй части носит более специальный характер и использует идею «особого расслоения Зейферта» из работы [9].

Определения. Под особенностью мы понимаем здесь росток (Y, y) аналитического пространства Y в точке y. Особенность называется *нормальной*, если Y нормально в точке y. Изоморфизм особенностей означает аналитический изоморфизм соответствующих ростков. Особенность называется *квазиоднородной*, если она изоморфна ростку некоторого квазиконуса в его вершине.

Следствие. *Каждая допустимая тройка (U, Γ, L) определяет нормальную квазиоднородную особенность $S(L)$. Каждая нормальная двумерная квазиоднородная особенность изоморфна особенности вида $S(L)$.*

3. Примеры. 1) Пусть G — конечная подгруппа группы $\mathrm{GL}(n+1, \mathbf{C})$, Γ — ее образ при каноническом гомоморфизме $\varphi\colon \mathrm{GL}(n+1, \mathbf{C}) \to \mathrm{PL}(n, \mathbf{C})$, m — порядок подгруппы $G \cap \operatorname{Ker} \varphi$. Расслоение $L = H^{\otimes m}$, где H соответствует гиперплоскому сечению $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, является Γ-расслоением относительно естественного действия Γ на $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Тройка $(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), \Gamma, L)$ является допустимой, а соответствующая особенность $S(L)$ изоморфна фактор-особенности $(\mathbf{C}^{n+1}/G, 0)$, где 0 — образ начала координат.

В случае $n = 1$ и $G \subset SL(2, \mathbf{C})$ получающиеся таким образом особенности есть особенности Клейна (в других терминах — двойные рациональные особенности, платонические особенности, особенности типа А, Д, Е; см. [4], § 9).

2) Пусть U — ограниченная однородная область в $\mathbf{C}^n$, Γ — дискретная группа аналитических автоморфизмов U с компактным фактором U / Γ. Каждое Γ-расслоение на U определяется тривиальным расслоением $U \times \mathbf{C}$ с Γ-действием $(z, \alpha) \to (g(z), h(g; z)\alpha)$, задаваемым фактором автоморфности $h \in Z^1(\Gamma, \mathcal{O}(U)^*)$. В частности, определен фактор автоморфности $h = J^{-1}$, где $J(g; z)$ — якобиан $g \in \Gamma$ в точке z. Известные результаты А. Бореля [5] и К. Кодаиры [7] показывают, что тройка (U, Γ, J) допустима. Связанную с ней квазиоднородную особенность назовем *канонической* и обозначим через $S(\Gamma)$.

В частности, пусть $U = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$, Γ — фуксова группа первого рода сигнатуры $(0, m; n_1, \ldots, n_m)$. При $m = 3$ особенности $S(\Gamma)$ были названы в [3] каноническими треугольными особенностями и там же перечислены те из них, которые вкладываются в $\mathbf{C}^3$ (это 14 унимодальных особенностей Арнольда). Если r — целое положительное число, взаимно простое с каждым из n_i, то существует не более одного фактора автоморфности h с $h^r = J^{-1}$. В случае, когда такой фактор существует (соответствующие условия можно получить из явного вычисления группы когомологий $H^2(\Gamma, \mathbf{Z})$; см. [6]), обозначим особенность, соответствующую тройке (U, Γ, h), через $S(\Gamma, r)$. Соответствующие наборы $(n_1, \ldots, n_m)$ и показатели r для поверхностей уровня бимодальных критических точек Арнольда даются в следующей таблице (обозначения из [2]).

Q_{16}	(3, 3, 9)	2	E_{18}	(3, 3, 5)	2
Q_{17}	(2, 4, 13)	3	E_{19}	(2, 4, 7)	3
Q_{18}	(2, 3, 21)	5	E_{20}	(2, 3, 11)	5
Z_{17}^1	(3, 3, 7)	2	U_{16}	(5, 5, 5)	2
Z_{18}^1	(2, 4, 10)	3	$W_{1,0}$	(2, 2, 3, 3)	1
			$J_{3,0}$	(2, 2, 2, 3)	1
Z_{19}^1	(2, 3, 16)	5	$Q_{2,0}$	(2, 2, 2, 5)	1
S_{16}	(3, 5, 7)	2	$S_{1,0}$	(2, 2, 3, 4)	1
S_{17}	(2, 7, 10)	3	$U_{1,0}$	(2, 3, 3, 3)	1
W_{17}	(3, 5, 5)	2	$Z_{1,0}^1$	(2, 2, 2,4)	1
W_{18}	(2, 7, 7)	3			

3) Параболические двумерные особенности В. И. Арнольда [1] можно получить из подходящего фактора автоморфности для решетки Γ в $\mathbf{C}$.

ВНИИКАнефтегаз

Поступило в редакцию
19 ноября 1974 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., УМН XXVIII, вып. 5 (1973), 17—44. 2. Арнольд В. И., Функц. анализ 9, вып. 1 (1975), 49—50. 3. Долгачев И. В., Функц. анализ 8, вып. 2 (1974), 75—76. 4. Милнор Дж., Особые точки комплексных гиперповерхностей, М., «Мир», 1971. 5. Borel A., Topology 2 (1963), 111—122. 6. Godement R., Semin. Bourbaki, March, 1954. Paris. 7. Kodaira K., Proc. Nat. Acad. Nat. USA 39 (1953), 1268—1273. 8. Mumford D., Geometric invariant theory, Springer-Verlag, 1966. 9. Orlik P., Wagreich Ph., Ann. Math. 93, № 2 (1971), 205—228.