ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
30 (1966), 1073—1100

УДК 513.6

И. В. ДОЛГАЧЕВ

О РАЦИОНАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ С ПУЧКОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

В работе дается перечисление всех минимальных моделей рациональных поверхностей с пучком эллиптических кривых с точки зрения бирегулярной эквивалентности расслоений.

Введение

В работе исследуются алгебраические поверхности, которые расслаиваются на пучок кривых рода 1 и в то же время рациональны, т. е. бирационально эквивалентны проективной плоскости. Основным результатом является перечисление всех (с точки зрения бирегулярной эквивалентности расслоений) минимальных моделей таких расслоений. При этом модель называется минимальной, если всякое ее бирациональное отображение является бирегулярным.

Этот вопрос эквивалентен задаче о классификации плоских пучков эллиптических кривых относительно группы бирациональных преобразований плоскости. Действительно, если отобразить рациональную поверхность V с пучком эллиптических кривых на плоскость, то пучок эллиптических кривых этой поверхности перейдет в плоский пучок таких кривых. Очевидно, что двум бирегулярно эквивалентным расслоениям будут соответствовать бирационально эквивалентные пучки. Наоборот, если задан пучок эллиптических кривых на плоскости, то он определяет рациональное отображение плоскости на проективную прямую; регуляризируя это отображение с помощью σ-процессов в базисных точках пучка, мы получим рациональную поверхность с пучком эллиптических кривых. Очевидно, что двум эквивалентным плоским пучкам соответствуют бирационально изоморфные расслоения.

Мы доказываем, что минимальным моделям рациональных поверхностей с пучком эллиптических кривых соответствуют построенные Альфаном (3) (пучки Альфана) пучки кривых степени $3m$, общая кривая которых имеет в заданных девяти точках (среди которых могут быть и бесконечно близкие) m-кратную особенность. В частном случае, когда расслоение имеет рациональное сечение (так называемое якобиево расслоение), ей соответствует пучок кубических кривых. Таким образом, получается новое доказательство классической теоремы Бертини (2) о классификации пучков эллиптических кривых на плоскости (доказательство Бертини с помощью развитой им техники кремоновых преобразований плоскости до сих пор не было переложено на современный уровень строгости).

В качестве второго следствия получается тот факт, что на рациональных поверхностях с пучком эллиптических кривых, не имеющих регулярного сечения, имеется только один кратный вырожденный слой.

На протяжении всей работы основное поле предполагается алгебраически замкнутым произвольной характеристики.

Я глубоко признателен И. Р. Шафаревичу за постановку задачи и многочисленные беседы, которые были для меня чрезвычайно полезны.

§ 1. Строение канонического класса и основные леммы

Пусть V — неособая проективная рациональная поверхность с пучком эллиптических кривых; это означает, что задано регулярное отображение $\pi: V \to B$ поверхности V на неособую кривую B такое, что прообразом общей точки кривой B является неприводимая неособая кривая рода 1. В случае, когда V рациональна, можно легко показать, что база B является проективной прямой P^1. Далее всюду предполагается, что поверхность V является минимальной моделью в следующем смысле: в слоях расслоения π не содержится исключительных кривых рода 1 (мы будем рассматривать только такие исключительные кривые). Это определение минимальной модели эквивалентно сформулированному во введении определению [см. (1), гл. VII, § 1].

Пусть K — канонический класс на V, а F — слой расслоения π: $V \to P^1$. Поверхность V не является минимальной моделью в обычном смысле теории алгебраических поверхностей (определение которой можно найти в (1), глава 2), так как на нашей поверхности $(K^2) = 0$ [см. (1), глава 5]. Отсюда следует, что на V существует хотя бы одна исключительная кривая S, которая в силу минимальности V не содержится в слоях и для которой $(S \cdot F) = m > 0$ постоянно для всех слоев F. Напомним, что база расслоения π — прямая, а потому все слои линейно эквивалентны между собой. Слой F_0 называется кратным, если $F_0 = \Sigma n_i C_i$, $n_i > 1$.

ТЕОРЕМА 1. *На поверхности V существует слой кратности m F_0 и для этого слоя*

$$K \sim -\frac{1}{m} F_0.$$

Доказательство. Прежде всего покажем, что линейная система $|-K|$ не пуста. Для этого воспользуемся неравенством Римана — Роха. Имеем:

$$l(-K) + l(2K) \geqslant \frac{-K(-K-K)}{2} + 1 - q + p_g.$$

Так как V рациональна, то $q = p_g = l(2K) = 0$ [см. (1), глава 3], откуда следует, что $l(-K) \geqslant 1$. Это доказывает нужное нам утверждение. Пусть теперь $D \in |-K|$. Известно [см. (1), глава 7, § 3], что в этом случае дивизор D является рациональной комбинацией слоев. Пусть

$$D = \sum \frac{n_i}{m_i} F_i, \tag{1}$$

где m_i — кратность слоя F_i. Для исключительной кривой S имеем $(S^2) = -1$ и $\pi(S) = 0$ [см. ([1]), глава 2]; отсюда и из формулы арифметического рода кривой получаем:

$$\frac{(S^2)+(S\cdot K)}{2}+1=\pi(S)=0.$$

Следовательно $(S\cdot K) = -1$.

Вычислим индекс пересечения кривой S с левой и правой частью формулы (1):

$$(D\cdot S)=\sum\frac{n_i}{m_i}(F_i\cdot S)=m\sum\frac{n_i}{m_i}=1. \qquad (2)$$

Из соотношения $(S\cdot F) = m$ вытекает, что кратность любого слоя должна делить число m. Отсюда, а также из того, что все $n_i \geqslant 0$, получаем, в силу формулы (2), что все n_i, кроме одного, равны 0, а неравный нулю коэффициент (мы можем считать, что это n_0) равен 1. Таким образом, $D=\frac{1}{m}F_0$, а значит, $K\sim-\frac{1}{m}F_0$.

По ходу доказательства мы уже получили, что F_0 — кратный слой максимальной кратности m. Тем самым все утверждения теоремы 1 полностью доказаны.

Следствие. *Число $m = (S\cdot F)$ постоянно для любой исключительной кривой S' на V.*

Действительно, для любой такой кривой $(S'\cdot K) = -1$ и, согласно теореме 1,

$$(S'\cdot K)=-\frac{1}{m}(S'F)=-1.$$

Минимальные модели рациональных поверхностей хорошо известны [см. ([1]), глава 5]. Такими могут быть только проективная плоскость P^2 или семейство поверхностей F_n $(n \neq 1)$. Для удобства мы будем считать далее, что $F_1 = P^2$.

ЛЕММА 1. *Пусть* $V=V^{(0)}\to V^{(1)}\to\ldots\to V^{(i)}\xrightarrow{\varphi_i}V^{(i+1)}\to\ldots\to V^{(k)}=F_n$ — *последовательность регулярных отображений V на ее минимальную модель F_n. Каждое отображение φ_i: $V^{(i)}\to V^{(i+1)}$ является сжатием некоторой исключительной кривой L_i на $V^{(i)}$. Если $F_0^{(i)}$ означает образ слоя F_0 на поверхности V при сквозном отображении $V\to V^{(i)}$, а $K^{(i)}$ — канонический класс на $V^{(i)}$, то*

$$K^{(i)}\sim-\frac{1}{m}F_0^{(i)},$$

где m одно и то же для всех i.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по длине цепочки из $V^{(i)}$. При $i = 0$ мы получаем утверждение теоремы 1. Пусть утверждение справедливо при $i \leqslant j$. Рассмотрим отображение $V^{(j)}\xrightarrow{\varphi_j}V^{(j+1)}$. В обозначениях книги ([1]) (глава 5) имеем: $\varphi_j = \mathrm{cont}_L$. Известно ([1]), что в этом случае

$$\varphi_j(K^{(j)})=K^{(j+1)}$$

и что при таком отображении сохраняются соотношения линейной эквивалентности. Нужное нам утверждение получается теперь проектированием равенства $K^{(j)} \sim -\frac{1}{m} F_0^{(j)}$ на $V^{(j+1)}$. Лемма доказана.

Применяя доказанную лемму к поверхности $V^{(k)} = F_n$, получим

Следствие. *Пусть F — образ слоя поверхности на ее минимальной модели. Тогда*

$$(F^2) = \begin{cases} 8m^2 \text{ для минимальной модели } F_n \ (n \neq 1), \\ 9m^2 \text{ для минимальной модели } F_1 = P^2. \end{cases}$$

Доказательство. Легко проверить (например, с помощью леммы 3, доказательство которой не опирается на это утверждение), что квадрат канонического класса на F_n

$$(K^2) = \begin{cases} 8 \text{ для } F_n \quad (n \neq 1), \\ 9 \text{ для } P^2. \end{cases}$$

Отсюда непосредственно вытекает утверждение следствия.

В условиях леммы 1 справедлива

ЛЕММА 2. *Любая исключительная кривая $L^{(i)}$ на $V^{(i)}$ является образом при сквозном отображении $V \to V^{(i)}$ или исключительной кривой на V или компоненты слоя F поверхности V.*

Доказательство. Проведем индукцию по длине цепочки из $V^{(i)}$. Для $i = 0$ это очевидно. Пусть утверждение справедливо для $i \leqslant j$. Пусть φ_j: $V^{(j)} \to V^{(j+1)}$ есть преобразование cont_{L_j}. Согласно лемме 1,

$$K^{(j)} \sim -\frac{1}{m} F_0^{(j)},$$

поэтому для любой исключительной кривой $L^{(j)}$ на $V^{(j)}$ и любого образа $F^{(j)}$ слоя F поверхности V имеем:

$$(L^{(j)} \cdot F^{(j)}) = m.$$

Предположим, что в точке P поверхности V задан σ-процесс σ: $V \to V^*$, и пусть X и Y — две кривые на V такие, что кратность P на X равна m, а на Y равна n. Тогда, как известно [см. ([1]), гл. 1, § 2],

$$(X^* \cdot Y^*)_{V^\circ} = (X \cdot Y)_V - mn,$$

где X^*, Y^* — собственные образы кривых X, Y. Кроме того, имеем:

$$(X^* \cdot L)_{V^*} = m, \quad (Y^* \cdot L)_{V^*} = n,$$

где L — кривая, вклеиваемая в точку P при σ-процессе. Взяв теперь за $L^{(j)}$ исключительную кривую L_j, получим, что фундаментальная точка преобразования φ_j^{-1} будет m-кратной особой точкой кривой $F^{(j+1)}$. Здесь возможны 2 случая: или эта точка лежит на той исключительной кривой, для которой мы хотим доказать лемму, или нет. Во втором случае мы получаем:

$$(\varphi_j^{-1}(L^{(j+1)}) \cdot F^{(j)}) = m,$$

т. е.

$$(\varphi_j^{-1}(L^{(j+1)}) \cdot K^{(j)}) = -1.$$

Отсюда, при условии, что $L^{(j+1)}$ — неособая рациональная кривая, выводим, что $\varphi_j^{-1}(L^{(j+1)})$ — исключительная кривая на $V^{(j)}$, а следовательно, по предположению индукции, образ исключительной кривой на V или компоненты ее слоя.

В первом случае

$$(\varphi_j \ (L^{(j+1)}) \cdot F^{(j)}) = 0,$$

а значит, $\varphi_j^{-1}(L^{(j+1)})$ — компонента слоя на $V^{(j)}$.

Лемма 2 полностью доказана. Из ее доказательства непосредственно вытекает

Следствие. *Число базисных точек пучка, индуцированного пучком поверхности V на ее минимальной модели F_n, равно числу непересекающихся исключительных кривых на V, и каждая базисная точка является m-кратной особой точкой для общей кривой пучка.*

Как известно [см. (1), глава 5], минимальные модели рациональных поверхностей являются расслоениями над проективной прямой с неособой рациональной кривой в качестве слоя. Базой группы классов дивизоров на F_n являются два класса: представитель первого — слой s, представитель второго — регулярное сечение b_n. Матрица пересечений выглядит следующим образом:

$$\begin{Vmatrix} (s^2) & (s \cdot b_n) \\ (b_n \cdot s) & (b_n^2) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -n \end{Vmatrix}.$$

ЛЕММА 3. *На минимальной модели F_n $(n \neq 1)$ канонический класс $K \sim -(n+2)s - 2b_n$.*

Доказательство. Для $n = 0$ утверждение леммы следует из того факта, что $F_0 = P^1 \times P^1$, а канонический класс на поверхности второго порядка равен $-2E$, где E — гиперплоское сечение ($s + b_0$ эквивалентно гиперплоскому сечению). Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — точки на b_0, а $s_1, \ldots, s_n$ — слои, проходящие через эти точки. Тогда

$$F_n = \mathrm{elm}_{(P_1 \ldots P_n)} F_0$$

[см. (1), глава 5], где

$$\mathrm{elm}_{P_i} = \mathrm{cont}_{s_i} \circ \mathrm{dil}_{P_i}$$

(в обозначениях книги (1), глава 5). Очевидно, что образ канонического класса на поверхности $\mathrm{dil}_{(P_1 \ldots P_n)} F_0$, есть $-[2b_n + \Sigma\, \mathrm{dil}_{P_i} + 2s]$ (здесь через dil_{P_i} обозначено не преобразование, а кривая, вклеиваемая в точку P_i при этом преобразовании). В результате преобразования cont_{s_i} мы получаем:

$$\mathrm{cont}_{s_i} \circ \mathrm{dil}_{P_i} \sim s,$$

что и доказывает нашу лемму.

Следствие. *Минимальной моделью для поверхности V может быть только одна из следующих трех поверхностей: P^2, F_0, F_2.*

Доказательство. В силу леммы 3, $K \sim -(n+2)s - 2b_n$. Возьмем на минимальной модели F_n неприводимую кривую из образа нашего пучка на V. По лемме 1,

$$F \sim m[(n+2)s + 2b_n]$$

и так как $(F \cdot b_n) \geqslant 0$, то

$$(F \cdot b_n) = m[(n+2)(s \cdot b_n) + 2(b_n^2)] = m(2-n) \geqslant 0,$$

что и доказывает нужное нам утверждение.

Замечание. Как заметил Ю. И. Манин, это важное следствие получается также непосредственно из того факта, что на V нет рациональных кривых с индексом самопересечения < -2. Действительно, если S — такая кривая, то мы имели бы

$$(S \cdot K) = -2 - (S^2) > 0,$$

а по теореме 1,

$$-(S \cdot K) = \frac{1}{m}(S \cdot F_0) < 0,$$

из чего следовало бы, что S содержится в слое, но, как известно [см. ([5])] в слоях таких кривых нет. В силу регулярности отображения V на ее минимальную модель, индекс самопересечения не может уменьшиться ни у какой кривой, следовательно, на минимальной модели V нет кривых с индексом самопересечения <-2, т. е. это может быть только P^2, F_0 или F_2.

§ 2. Групповой закон на кривых арифметического рода 1

Пусть X — проективная алгебраическая кривая без кратных компонент. Пусть $\mathfrak{O}_X$ — ее структурный пучок; предположим, что арифметический род X $\pi = \dim H^1(X, \mathfrak{O}_X) = 1$. Если кривая X неособая, то хорошо известно, что на множестве ее точек можно ввести структуру коммутативной алгебраической группы. Покажем, что на множестве неособых точек произвольной кривой X арифметического рода 1 можно также ввести структуру алгебраической коммутативной группы.

Пусть X — произвольная связная алгебраическая кривая без кратных компонент, $X = \bigcup\limits_{1=i}^{n} X_i$ — ее разложение на неприводимые компоненты, $\overline{X} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{X}_i$ — ее неособая модель. Пусть $p\colon \overline{X} \to X$ — каноническая проекция кривой $\overline{X}$ на X, и пусть $\mathfrak{C}$ — кондуктор кривой X в $\overline{X}$, рассматриваемый как дивизор на $\overline{X}$. Напомним, что

$$\mathfrak{C} = \sum_{P \in X} \mathfrak{C}_P,$$

где $\mathfrak{C}_P$ — дивизор, соответствующий кондуктору кольца $\mathfrak{O}_{X,P}$ в его целом замыкании

$$\overline{\mathfrak{O}}_{X,P} = \bigcap_{Q \to P} \mathfrak{O}_{\overline{X},Q}.$$

Пусть

$$\pi = \dim H^1(X, \mathfrak{O}_X), \qquad \pi_i = \dim H^1(X_i, \mathfrak{O}_{\overline{X}_i}),$$

а g_i — род неособой кривой $\bar{X}_i$. Имеем [см. ([8]), гл. II):

$$\pi = g_1 + \ldots + g_n + \delta - h + 1, \tag{1}$$

где

$$\delta = \dim H^0(X, p_*(\mathfrak{O}_{\bar{X}}) \,/\, \mathfrak{O}_X).$$

Далее мы будем предполагать, что кривая X лежит на неособой алгебраической поверхности V. Пусть K — канонический класс этой поверхности. В этом случае имеем [см. ([11]), гл. IV]:

$$\pi = \frac{(X^2) + (X \cdot K)}{2} + 1, \tag{2}$$

$$2\delta = n(\mathfrak{C}). \tag{3}$$

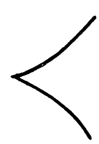
Для $n > 1$ формула (2) дает:

$$\pi = \pi_1 + \ldots + \pi_n + \sum_{i<j} (X_i \cdot X_j) - h + 1. \tag{4}$$

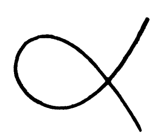
Пусть $\pi = 1$, если $h = 1$, то формула (1) показывает, что возможны только 3 случая:

1) $g = 1$, $\delta = 0$; кривая X — неособая.

2) $g = 0$, $\delta = 1$, $\mathfrak{C} = 2P$; кривая X — особая с единственной особой точкой обыкновенного изгиба.



3) $g = 0$, $\delta = 1$, $\mathfrak{C} = P_1 + P_2$; кривая X имеет единственную особую обыкновенную двойную точку:



Предположим теперь, что $h > 1$. В силу того, что кривая X связна, имеем:

$$\mathfrak{C}_P \neq \mathfrak{C} \cap X_i, \quad i = 1, \ldots, h, \quad P \in X.$$

Далее мы будем предполагать, что кривая X обладает тем свойством, что $n(\mathfrak{C} \cap X_i) > 1$. Учитывая это условие и связность кривой X, получаем:

$$\sum (X_i \cdot X_j) \geqslant h,$$

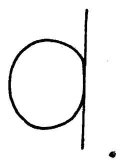
а формулы (1) и (4) показывают, что все кривые X_i неособые:

$$\pi_i = g_i = 0, \quad i = 1, \ldots, h,$$

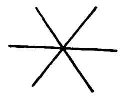
$$\frac{1}{2} n(\mathfrak{C}) = \delta = h = \sum_{i<j} (X_i \cdot X_j). \tag{5}$$

Принимая все это во внимание и рассматривая всевозможные комбинации кривых X_i, приходим к заключению, что возможны только два типа кривых X:

I) $\mathfrak{C} \cap X_i = 2P_i, \quad i = 1, \ldots, h$ и $h \leqslant 3$,

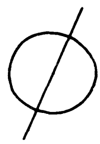


$h=2$

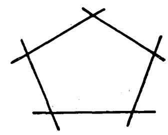


$h=3$

II) $\mathfrak{C} \cap X_i = P_i + P_i'$



$h=2$



$h>2$

При $h=1$ мы причисляем кривую с обыкновенной особой точкой к типу II, а кривую с точкой обыкновенного изгиба — типу I. Таким образом, мы получим всевозможные типы кривых арифметического рода 1 (при условии $n(\mathfrak{C} \cap X_i) > 1$, которое всюду в дальнейшем мы будем предполагать выполненным).

Легко видеть, что предыдущая классификация кривых арифметического рода 1 совпадает с классификацией Кодаиры ([5]) и Нерона ([7]) (для случая поля произвольной характеристики) вырожденных слоев без кратных компонент расслоения на эллиптические кривые. Условие $n(\mathfrak{C} \cap X_i) > 1$ аналогично условию Кодаиры, согласно которому в слоях расслоения нет исключительных кривых рода 1. Таким образом, каждую кривую арифметического рода 1 можно рассматривать как слой минимальной модели с пучком эллиптических кривых. Отсюда следует [см. ([7]), ([4])], что на множестве неособых точек кривой арифметического рода можно ввести каноническим образом структуру алгебраической коммутативной группы.

Предложение 1. *Пусть X — кривая арифметического рода 1. Обозначим через G группу ее неособых точек. Пусть $\mathfrak{D}$ — группа неособых дивизоров X, P — подгруппа дивизоров вида* (φ), *где функция* φ *обратима во всех локальных кольцах особых точек кривой X. Пусть s — каноническое отображение $\mathfrak{D}$ в G. Тогда*:

1) $s(P) = 0$;

2) *если D имеет нулевую степень на каждой компоненте X, то из* $s(D) = 0$ *следует* $D \in P$.

Доказательство. Мы ограничимся только случаем, когда кривая X — типа II. Для приложений нам этого будет достаточно, а общий случай устанавливается аналогично. Для доказательства нам потребуется явное описание структуры G [см. ([4])]. Пусть $X = \bigcup_{i=0}^{h-1} X_i$, а P_i, $i = 0, \ldots, h-1$,— особые точки кривой X. Точки P_i и P_{i+1} ($i \in \mathbf{Z}_h$) определяют на компоненте X_i две точки; обозначим их через P_i' и P_i''. Очевидно, можно считать, что $P_i' = 0$, а $P_i'' = \infty$. Пусть P — произвольная точка кривой X. Если $P \in X_i$ и a — ее координата на X_i, то поставим в соответствие точке P пару (a, i), где $i \in \mathbf{Z}_h$. Сложение в группе G будет определяться формулой:

$$(a, i) \oplus (b, j) = (ab, i + j).$$

Легко видеть, что точка $(1, 0)$ — единица группы G, а множество неособых точек компоненты X_0 образует связную компоненту единицы. Группа $G \simeq k^* \times \mathbf{Z}_h$.

Докажем утверждение 1). Пусть $D = (\varphi) \in P$. Так как $\deg D = 0$, то ясно, что $s(D) \in X_0$. Пусть $D_i = D \cap X_i$; тогда очевидно, что $D_i = (\varphi_i)$, где φ_i — функция, индуцируемая функцией φ на X_i. Если

$$D_i = Q_1^i + \ldots + Q_{k_i}^i - R_1^i - \ldots - R_{k_i}^i,$$

то

$$\varphi_i = \prod_{j=1}^{k_i} \frac{(x - Q_j^i)}{(x - R_j^i)} c_i, \quad c_i \in k^*.$$

Так как функция φ обратима во всех точках P_i, то [см ([11])] имеем:

$$\varphi_i(P_i') = \varphi_{i-1}(P_{i-1}''), \quad i \in \mathbf{Z}_h.$$

т. е.

$$\prod_{j=1}^{k_i} \frac{Q_j^i}{R_j^i} c_i = c_{i-1}, \quad i \in \mathbf{Z}_h.$$

Отсюда следует:

$$\prod_{i=0}^{h-1} \prod_{i=1}^{k_i} \frac{Q_j^i}{R_j^i} = \frac{c_{h-1}}{c_0} \cdot \frac{c_0}{c_1} \cdots \frac{c_{h-2}}{c_{h-1}} = 1.$$

Докажем утверждение 2). Пусть J — обобщенное якобиево многообразие кривой X [см. ([10])]. В силу утверждения 1) и свойства универсальности J, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[dr, "\xi"'] & G \arrow[d, "\psi"] \\ & J \end{tikzcd}$$

Если $\deg (D \cap X_i) = 0$ и $s(D) = 0$, то

$$\xi(D) = \psi \circ s(D) = 0.$$

Так как ξ — изоморфизм на фактор-группе дивизоров нулевой степени на каждой компоненте по главным дивизорам вида (φ), где φ обратима в особых точках X, то $D \in P$.

В дальнейшем нам понадобится частный случай изложенного выше, а именно, кубическая плоская кривая.

Мы будем рассматривать только кривые типа II. Деля их по числу компонент, мы получаем три типа таких кривых:

1) X — неприводимая кривая с обыкновенной двойной точкой;

2) X распадается на квадрику и прямую, пересекающиеся в двух различных точках.

3) X распадается на 3 прямые, не имеющие общей точки.

Легко видеть, что эти 3 типа охватывают все кубические кривые, особые точки которых — обыкновенные двойные точки.

ЛЕММА 4. *Пусть $P_1 + P_2 + P_3$ — неособый цикл на кубической кривой, высекаемый прямой. Тогда*

$$s(P_1 + P_2 + P_3) = 0.$$

Доказательство. 1. Пусть кубическая кривая имеет тип 1). В этом случае мы берем за единицу группы ее неособых точек неособую точку перегиба $\mathfrak{O}$. Пусть $L = 0$ — уравнение касательной в этой точке, а $A = 0$ — уравнение прямой, высекающей цикл $P_1 + P_2 + P_3$. Тогда

$$\left(\frac{A}{L}\right) = P_1 + P_2 + P_3 - \mathfrak{O}$$

и в силу предложения 1,

$$s(P_1 + P_2 + P_3) = s(3\mathfrak{O}) = 0,$$

что и требовалось доказать.

2. Пусть кубическая кривая имеет тип 2) и 3). Тогда выбираем за единицу группы неособых точек этой кривой такую точку, для которой $s(D) = 0$, где D — цикл, высекаемый бесконечно удаленной прямой. Остальная часть доказательства совпадает с проведенным для случая кривой типа 1).

§ 3. Пучки Альфана

Пусть V — алгебраическая поверхность, P — неособая точка на V. Пусть $Z(V)$ — группа нульмерных циклов над V [см. ([1]), V, § 3]. Точка $P' \in Z(V)$ называется бесконечно близкой к точке P первого порядка, если $P' \in \sigma(P)$, где $\sigma : V \to V'$ — σ-процесс в точке P. Определение бесконечно близкой точки порядка k дается по индукции [см. ([6])].

Пусть $P' \in Z(V)$, C — кривая на V, C' — кривая, проходящая через P' и являющаяся образом кривой C при некотором антирегулярном преобразовании поверхности V. Мы определяем кратность кривой C в точке P', как кратность C' в точке P', и обозначаем эту кратность через (C, P'). Аналогично определяется индекс пересечения $i(C, B, P')$ для кривых C, $B \subset V$.

Пусть D — некоторый дивизор на V, $P_1, \ldots, P_n$ — точки над V, а $m_1, \ldots, m_n$ — целые числа больше нуля. Линейную систему кривых на V, линейно эквивалентных дивизору D, для которых кратность в каждой точке $P_i \geqslant m_i$, будем обозначать через $D - m_1P_1 - \ldots - m_nP_n$.

Определение. Пусть $\mathfrak{G}_3$ — кубическая плоская кривая, все точки которой неособы или являются обыкновенными двойными точками. Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — точки этой кривой (среди которых могут быть и особые). Пусть точки $P_1^{(k_1)}, \ldots, P_n^{(k_n)}$ — бесконечно близкие к точкам $P_1, \ldots, P_n$ порядка $k_1, \ldots, k_n$ соответственно. Предположим, что

$$\sum_{i=1}^{n} (k_i + 1) = 9,$$

и пусть m — положительное целое число. Если линейная система

$$m\mathfrak{G}_3 - \sum_{i=1}^{n} mP_i^{(k_i)}$$

неприводима и имеет размерность не меньше 1, то она называется пучком Альфана.

Заметим, что для $m > 1$ из неприводимости линейной системы $m\mathfrak{G}_3 - \sum mP_i^{(k_i)}$ следует, что ее размерность $\geqslant 1$.

Предложение 1.

1) *Размерность пучка Альфана равна* 1.

2) *Общая кривая пучка имеет в каждой точке $P_i^{(k_i)}$ m-кратную особую точку.*

3) *Если точка P_i особая, то $k_i \geqslant 1$, а следовательно, общая кривая пучка имеет в этой точке m-кратную особую точку с совпадающими касательными.*

4) *Общая кривая пучка является эллиптической кривой степени* $3m$.

Доказательство. 1) Пусть F_{3m} — общая кривая пучка Альфана. Из определения следует, что

$$i(\mathfrak{G}_3, F_{3m}, P_i) \geqslant m(k_i + 1),$$

где $i(\mathfrak{G}_3, F_{3m}, P_i)$ обозначает индекс пересечения кривых F_{3m} и $\mathfrak{G}_3$ в точке P_i. По определению,

$$\sum_{i=1}^{n} (k_i + 1) = 9,$$

а значит,

$$9m = (\mathfrak{G}_3,\ F_{3m}) \geqslant \sum_{i=1}^{n} i\,(\mathfrak{G}_3,\ F_{3m},\ P_i) \geqslant 9m.$$

Отсюда следует, во-первых, что

$$i(\mathfrak{G}_3, F_{3m}, P_i) = m(k_i + 1),$$

а во-вторых, что любая одномерная подсистема пучка Альфана, имея одинаковый базисный цикл со всей системой, совпадает со всем пучком Альфана, что и требовалось доказать.

2) Утверждение 2) непосредственно следует из определения и доказательства утверждения 1).

3) Согласно доказательству утверждения 1) получаем:

$$i(\mathfrak{G}_3, F_{3m}, P_i) = m(k_i + 1).$$

Остается заметить, что если P_i — особая точка кривой $\mathfrak{G}_3$, то

$$i(F_{3m},\ \mathfrak{G}_3,\ P_i) \geqslant 2m.$$

4) известная формула изменения арифметического рода кривой при σ-процессе показывает, что род общей кривой пучка равен

$$g = \frac{(3m-1)(3m-2)}{2} - \sum_{i=1}^{n} (k_i + 1)\frac{m(m-1)}{2} = \frac{(3m-1)(3m-2)}{2} - 9\frac{m(m-1)}{2} = 1.$$

Здесь мы воспользовались теоремой Бертини [см. ([1]), гл. 1, § 3], согласно которой общая кривая пучка не имеет особых точек, кроме базисных точек пучка. Итак, все утверждения доказаны.

Пусть $m\mathfrak{S}_3 - \sum\limits_{i=1}^{n} mP_i^{(k_i)}$ — пучок Альфана. Если кривая $\mathfrak{S}_3$ неособа, то, как легко следует из ([12]) (гл. VI, § 9, теорема 9.2),

$$s\left(\sum_{i=1}^{n} (k_i+1)P_i\right) = \varepsilon_m,$$

где ε_m — точка m-го порядка в группе точек неособой кубической кривой. Это условие является необходимым для того, чтобы данные точки на кривой $\mathfrak{S}_3$ определяли пучок Альфана. Целью этого параграфа является обобщение этого условия на особую кривую $\mathfrak{S}_3$ и доказательство его достаточности.

Пусть $\mathfrak{S}_3$ — кубическая кривая типа 1) (см. § 2). Возьмем за единицу группы неособых точек этой кривой неособую точку перегиба $\mathfrak{O}$. Пусть

$$m\mathfrak{S}_3 - \sum_{i=1}^{n} mP_i^{(k_i)} \quad \text{и} \quad k_1 < 8$$

— пучок Альфана, и пусть точка P_1 — особая для кривой $\mathfrak{S}_3$. Рассмотрим пучок кубических кривых, проходящих через точку $P_1^{(k_1)}$ и, если $k_1 < 7$, произвольную точку $\mathfrak{O}^{(6-k_1)}$, бесконечно близкую к точке $\mathfrak{O}$ порядка $6 - k_1$. Любая кривая этого пучка проходит через одну неособую точку A_1 кривой $\mathfrak{S}_3$. Назовем эту точку ассоциированной с пучком Альфана $m\mathfrak{S}_3 - \sum\limits_{i=1}^{n} mP_i^{(k_i)}$ относительно особой точки P_1. Соответствующий пучок

$$\mathfrak{S}_3 - P_1^{(k_1)} - \mathfrak{O}^{(6-k_1)} - A_1$$

($\mathfrak{S}_3 - P_1^{(7)} - A_1$, если $k_1 = 7$) мы будем называть ассоциированным с пучком Альфана относительно особой точки P_1.

Распространение этого определения на кубические кривые типов 2) и 3) вызывает некоторые осложнения, ввиду их приводимости.

Пусть $\mathfrak{S}_3$ — кубическая кривая типа 2). Пусть $\mathfrak{O}$ — единица группы неособых точек этой кривой. Прямая, проходящая через точку $\mathfrak{O}$ и не касающаяся квадрики, определяет еще две точки кривой $\mathfrak{S}_3$: $\mathfrak{O}_1$ и $\mathfrak{O}_2$. Согласно лемме,

$$s(\mathfrak{O}_1 + \mathfrak{O}_2) = 0.$$

Пусть $m\mathfrak{S}_3 - \sum\limits_{i=1}^{n} mP_i^{(k_i)}$ — пучок Альфана, и пусть P_1 — особая точка кривой $\mathfrak{S}_3$. Если $k_1 = 1$, то мы даем аналогичное определение ассоциированной точки, выбирая за ассоциированный пучок пучок

$$\mathfrak{S}_3 - P_1^{(1)} - \mathfrak{O}^{(1)} - \mathfrak{O}_1^{(1)} - \mathfrak{O}_2^{(1)} - A_1.$$

Если $k_1 = 2$, то за ассоциированный пучок мы выбираем пучок

$$\mathfrak{S}_3 - P_1^{(2)} - \mathfrak{O} - \mathfrak{O}_1^{(1)} - \mathfrak{O}_2^{(1)} - A_1.$$

Если $k_1 = 3$ и общая кривая пучка Альфана касается в точке P_1 прямой, то мы берем пучок

$$\mathfrak{G}_3 - P_1^3 - \mathfrak{O}_1^{(1)} - \mathfrak{O}_2^{(1)} - A_1,$$

если же — квадрики, то пучок

$$\mathfrak{G}_3 - P_1^{(3)} - \mathfrak{O}^{(1)} - \mathfrak{O}_1 - \mathfrak{O}_2 - A_1.$$

Если $k_1 = 4$, то мы берем пучок

$$\mathfrak{G}_3 P_1^{(4)} - \mathfrak{O} - \mathfrak{O}_1 - \mathfrak{O}_2 - A_1,$$

если $k_1 = 5$, то пучок

$$\mathfrak{G}_3 - \mathfrak{O}^{(1)} - P_1^{(5)} - A_1.$$

Наконец, если $k_1 = 6$, то за ассоциированный пучок мы берем пучок

$$\mathfrak{G}_3 - P_1^{(6)} - \mathfrak{O} - A_1.$$

Пусть $\mathfrak{G}_3$ — кубическая кривая типа 3) и $m\mathfrak{G}_3 - \sum_{i=1}^{n} mP_i^{(k_i)}$ — пучок Альфана. Если $k_1 = 1$, то за единицу группы неособых точек кривой $\mathfrak{G}_3$ мы берем произвольную точку $\mathfrak{O}$ и определяем, как и выше, точки $\mathfrak{O}_1$ и $\mathfrak{O}_2$ такие, что $s(\mathfrak{O}_1 + \mathfrak{O}_2) = 0$, а за ассоциированный относительно особой точки P_1, пучок берем пучок

$$\mathfrak{G}_3 - P_1^{(1)} - \mathfrak{O}^{(1)} - \mathfrak{O}_1^{(1)} - \mathfrak{O}_2^{(1)} - A.$$

Пусть $k \geqslant 2$. Предположим сначала, что среди точек P_i только одна особая точка кривой $\mathfrak{G}_3$ — точка P_1. За единицу группы неособых точек кривой $\mathfrak{G}_3$ возьмем произвольную точку $\mathfrak{O}$, лежащую на той компоненте, которой касается в точке P_1 общая кривая пучка Альфана. Если $k_1 = 2$, то за ассоциированный пучок мы берем пучок

$$\mathfrak{G}_3 - P_1^{(2)} - \mathfrak{O} - \mathfrak{O}_1^{(1)} - \mathfrak{O}_2^{(1)} - A_1,$$

а если $k_1 = 3$, то пучок

$$\mathfrak{G}_3 - P_1^{(3)} - \mathfrak{O}_1^{(1)} - \mathfrak{O}_2^{(1)} - A_1.$$

Если же среди точек P_i есть две особые точки: P_1 и P_2, то для того чтобы определить ассоциированные относительно этих точек точки A_1 и A_2, нам надо выбрать за единицу $\mathfrak{O}$ такую точку, которая бы годилась для определения обеих точек A_1, A_2. Если хотя бы одно из чисел k_1, k_2 равно единице, то это не представляет труда. Если же $k_1 \geqslant 2$, $k_2 \geqslant 2$, то за точку $\mathfrak{O}$ мы берем произвольную точку, лежащую на той компоненте, которой касается в точке P_2 общая кривая пучка Альфана. Тогда для определения точки A_1 мы берем пучок

$$\mathfrak{G}_3 - P_1^{(2)} - \mathfrak{O}_1 - \mathfrak{O}_2 - \mathfrak{O}^{(2)} - A_1.$$

Пусть, наконец, все три особые точки кривой $\mathfrak{G}_3$ P_1, P_2, P_3 являются базисными точками пучка Альфана $m\mathfrak{G}_3 - \sum_{i=1} mP_i^{(k_i)}$. Если хотя бы одно из чисел k_i ($i = 1, 2, 3$) равно единице, то на основании вышесказанного можно выбрать за единицу такую точку $\mathfrak{O}$, которая бы годилась для определения ассоциированных точек A_1, A_2, A_3. Осталось разобрать случай $k_1 = k_2 = k_3 = 2$. Здесь мы берем за точку $\mathfrak{O}$ произвольную точку, лежащую на компоненте, которой касается в точке P_1 общая кривая пучка Альфана. Пусть эта компонента соединяет точки P_1 и P_2. Тогда за ассоциированный пучок относительно точки P_2 мы берем пучок

$$\mathfrak{G}_3 - P_2^{(2)} - \mathfrak{O}^{(1)} - \mathfrak{O}_1 - \mathfrak{O}_2^{(1)} - A_2,$$

а относительно точки P_3 — пучок

$$\mathfrak{G}_3 - P_3^{(2)} - \mathfrak{O}^{(1)} - \mathfrak{O}_1^{(1)} - \mathfrak{O}_2 - A_3.$$

ЛЕММА 5. *Пусть X — алгебраическая кривая на поверхности V, P — обыкновенная двойная точка кривой. Пусть S, S^1 — алгебраические кривые на V, локальные уравнения которых в точке P: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ соответственно. Пусть $P = P^{(0)} < P^{(1)} < \ldots < P^{(k-1)} < P^{(k)}$ — последовательность бесконечно близких точек порядка $1, 2, \ldots, k$. Предположим, что $(X \cdot P^{(i)}) = 2$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$, и кривая X не проходит через точку $P^{(k)}$. Предположим, кроме того, что*

$$(S, P^{(i)}) = (S^1, P^{(i)}) = m, \quad i = 0, \ldots, k.$$

Тогда функция $\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}$ обратима в локальном кольце $\mathfrak{O}_{X,P}$ точки P.

Доказательство. Пусть $x = 0$, $y = 0$ — локальные уравнения касательных к кривой X в точке P. Пусть X' — неособая модель кривой X, кривая X' является собственным образом кривой X при σ-процессе в точке P и

$$\sigma^{-1}(P) \cap X' = P_1 + P_2,$$

где $P_1 \neq P_2$ — простые точки кривой X'. Как известно, функция φ_1 / φ_2 обратима в кольце $\mathfrak{O}_{X,P}$ тогда и только тогда, когда $\sigma^*(\varphi_1/\varphi_2)$ обратима в кольцах $\mathfrak{O}_{X',P_1}$ и $\mathfrak{O}_{X',P_2}$ и принимает в них одинаковое значение [см. ([11]), гл. IV]. Пусть

$$\varphi_1 = (ax + by)^m + \rho_{m+1}(x, y) + \ldots,$$

$$\varphi_2 = (ax + by)^m + \rho'_{m+1}(x, y) + \ldots,$$

где $\rho_{m+1}(x, y)$, $\rho'_{m+1}(x, y)$ — однородные полиномы степени $m+1$. Имеем:

$$\sigma^*(\varphi_1) = x^m[(a + bz)^m + x\rho_{m+1}(1, z) + \ldots],$$

$$\sigma^*(\varphi_2) = x^m[(a + bz)^m + x\rho'_{m+1}(1, z) + \ldots].$$

Если $k = 1$, то $a, b \neq 0$ и

$$\frac{\sigma^*(\varphi_1)}{\sigma^*(\varphi_2)}(P_1) = \frac{\sigma^*(\varphi_1)}{\sigma^*(\varphi_2)}(P_2) = 1,$$

т. е. утверждение леммы доказано.

Пусть $k > 1$ и $P^{(1)} = P_1$. Легко видеть, что

$$\frac{\sigma^*(\varphi_1)}{\sigma^*(\varphi_2)} \in \mathfrak{O}_{X', P_2}$$

и

$$\frac{\sigma^*(\varphi_1)}{\sigma^*(\varphi_2)}(P_2)=1.$$

Применяя предыдущее рассуждение в точке $P^{(k-1)}$, получим:

$$\psi^*\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)\in\mathfrak{O}_{\psi(X),\,P^{(k-1)}},\qquad \psi=\sigma_{k-2}\circ\cdots\circ\sigma_1\circ\sigma,$$

где σ_i — σ-процесс в точке $P^{(i)}$, и, кроме того

$$\psi^*\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)(P^{(k-1)})=\frac{\sigma^*(\varphi_1)}{\sigma^*(\varphi_2)}(P_1)=1.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $m\mathfrak{C}_3-\sum_{i=1}^{n}mP_i^{(k_i)}$ — *пучок Альфана. Пусть* $P_j(1\leqslant j\leqslant p,\ p\leqslant 3)$ — особые точки кривой $\mathfrak{C}_3$, а A_j — *точки, ассоциированные с этим пучком относительно точек* P_j *соответственно. Тогда*

$$s\left(\sum_{i=2+1}^{n}(k_i+1)P_i-\sum_{j=1}^{p}A_j\right)=\varepsilon_m,$$

где ε_m — *точка порядка, делящего* m, *в группе неособых точек кривой* $\mathfrak{C}_3$. *Если все точки* P_i *неособые, то*

$$s\left(\sum_{i=1}(k_i+1)P_i\right)=\varepsilon_m.$$

Доказательство. Для каждого типа кривой $\mathfrak{C}_3$ проведем доказательство отдельно.

1) Пусть $\mathfrak{C}_3$ — неособая кривая. В этом случае, как уже указывалось выше, доказательство непосредственно следует из ([12]) (гл. VI, § 9, теорема 9.2).

2) Пусть $\mathfrak{C}_3$ — особая кривая произвольного типа и все точки P_i неособые. Пусть $L=0$ — уравнение произвольной прямой, не проходящей через особые точки кривой $\mathfrak{C}_3$, и пусть $F_{3m}=0$ — уравнение общей кривой пучка Альфана. Тогда дивизор функции

$$\left(\frac{F_{3m}}{L^{3m}}\right)=m\left(\sum_{i=1}^{n}(k_i+1)P_i-3L\cdot\mathfrak{C}_3\right)\sim 0.$$

Отсюда, в силу леммы 4, получаем:

$$ms\left(\sum_{i=1}^{n}(k_i+1)P_i\right)=0,$$

что и требовалось доказать.

3) Пусть $\mathfrak{C}_3$ типа 1) (см. § 2). Пусть $F_{3m}=0$ — уравнение общей кривой пучка Альфана, а $A_3=0$ — уравнение общей кривой ассоциированного с ним относительно точки P_1 пучка. Согласно предыдущей лемме, функция $\frac{F_{3m}}{A_3^m}$ обратима в точке P_1 и

$$\left(\frac{F_{3m}}{A_3^m}\right)=\begin{cases} m\left(\sum_{i=2}(k_i+1)P_i-(7-k_1)\mathfrak{O}-A_1\right)\sim 0, & \text{если } k_1<7,\\ m(P_2-A_1), & \text{если } k_1=7.\end{cases}$$

где A_1 — точка, ассоциированная с пучком Альфана относительно особой точки P_1. Отсюда следует (см. § 2):

$$ms\left(\sum_{i=2}^{n}(k_i+1)P_i-A_1\right)=0,$$

что и требовалось доказать.

4) Пусть $\mathfrak{G}_3$ типа 2). Тогда если среди точек P_i только одна особая точка кривой $\mathfrak{G}_3$, скажем P_1, то, как и прежде, мы рассматриваем функцию $\frac{F_{3m}}{A_3^m}$. Применяя лемму, получаем:

$$\left(\frac{F_{3m}}{A_3^m}\right)=\begin{cases} m\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(k_i+1)P_i-2\mathfrak{D}-2\mathfrak{D}_1-2\mathfrak{D}_2-A_1\right), & \text{если } k_1=1,\\ m\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(k_i+1)P_i-2\mathfrak{D}_1-2\mathfrak{D}_2-\mathfrak{D}-A_1\right), & \text{если } k_1=2,\\ m\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(k_i+1)P_i-2\mathfrak{D}_1-2\mathfrak{D}_2-A_2\right), & \text{если } k_1=3 \text{ и кривая}\\ \qquad F_{3m}=0 \text{ касается в } P_1 \text{ прямой},\\ m\left(\sum\limits_{i=2}^{n}(k_i+1)P_i-2\mathfrak{D}-\mathfrak{D}_1-\mathfrak{D}_2-A_1\right), & \text{если } k_1=3 \text{ и кривая}\\ \qquad F_{3m}=0 \text{ касается в } P_1 \text{ квадрики},\\ m\left(\sum\limits_{i=2}^{n}(k_i+1)P_i-\mathfrak{D}-\mathfrak{D}_1-\mathfrak{D}_2-A_1\right), & \text{если } k_1=4,\\ m\left(\sum\limits_{i=2}^{n}(k_i+1)P_i-2\mathfrak{D}-A_1\right), & \text{если } k_1=5,\\ m\left(\sum\limits_{i=2}^{n}(k_i+1)P_i-\mathfrak{D}-A_1\right), & \text{если } k_1=6. \end{cases}$$

Во всех случаях, как легко видеть, имеем:

$$ms\left(\sum_{i=2}^{n}(k_i+1)P_i-A_1\right)=0,$$

что и требовалось доказать.

Если же среди точек P_i есть две особые: P_1 и P_2, то мы берем функцию $\frac{F_{3m}L^{3m}}{A_3^m A_3'^m}$, где $L=0$ — уравнение прямой, проходящей через точки $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, а $A_3=0$, $A_3'=0$ — уравнения общих кривых ассоциированных пучков относительно особых точек P_1 и P_2. Как и выше, находим:

$$m\left(\sum_{i=3}^{n}(k_i+1)P_i-A_1-A_2\right)\sim mD,$$

где, как легко проверяется, во всех случаях $s(D)=0$.

5) Пусть $\mathfrak{G}_3$ типа 3). Пусть P_1, P_2, P_3 — особые точки кривой $\mathfrak{G}_3$

и $A_3 = 0$, $A_3' = 0$, $A_3'' = 0$ — уравнения общих кривых ассоциированных пучков относительно этих точек. Рассмотрим функцию

$$f = \frac{F_{3m}L^{6m}}{A_3^m A_3'^m A_3''^m},$$

где $L = 0$ — уравнение прямой, соединяющей точки $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$. Имеем:

$$(f) = m\left(\sum_{i=n}^{n}(k_i+1)P_i + 6\mathfrak{D} + 6\mathfrak{D}_1 + 6\mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D} - 2\mathfrak{D}_1 - 2\mathfrak{D}_2 -\right.$$

$$\left.- 2\mathfrak{D} - 2\mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_1 - 2\mathfrak{D} - 2\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2 - \sum_{i=1}^{s} A_i\right) =$$

$$= m\left(\sum_{i=n}^{n}(k_i+1)P_i - (\mathfrak{D} + \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2) - \sum_{i=1}^{s} A_i\right) \sim 0,$$

откуда вытекает нужное утверждение.

Рассмотрение остальных случаев не представляет труда и может быть предоставлено читателю.

Перейдем к доказательству достаточности выведенных нами условий. Докажем, прежде всего, следующую лемму.

ЛЕММА 6. *Пусть X — алгебраическая кривая на поверхности, V, P — неособая точка на X. Пусть $g(x, y) = 0$ — локальное уравнение кривой X в точке P, и пусть m, k — целые, большие нуля, а X' — алгебраическая кривая на V такая, что $i(X, X', P) = km$. Обозначим ее локальное уравнение через $F'(x, y) = 0$. Тогда существуют последовательность бесконечно близких точек $P = P^{(0)} < P^{(1)} < \ldots < P^{(k-1)}$ и кривая X'' такие, что $(X'', P^{(i)}) = m$ для $i = 0, \ldots, k = 1$, и если $F(x, y) = 0$ — локальное уравнение кривой X'' в точке P, то*

$$F'(x_i, y) - F(x, y) \equiv 0 \pmod{(g(x, y))}.$$

Доказательство. Допустим сначала, что $k = 1$. Пусть

$$F'(x, y) = \rho_l(x, y) + \rho_{l+1}(x, y) + \ldots,$$

где $\rho_l(x, y)$ — однородный полином степени l. Если $l \geqslant m$, то все доказано. Пусть $l < m$ и $y = 0$ — локальное уравнение касательной к кривой X в точке P. В силу того, что $i(X, X', P) = m > l$, имеем:

$$\rho_l(x, y) = y^k \prod_{i=1}^{l-k}(a_i x + b_i y), \quad a_i \neq 0, \quad k > 0.$$

Отсюда следует, что

$$F''(x, y) = F'(x, y) - g(x, y)^k h(x, y) = \rho'_{l+1}(x, y) + \ldots,$$

где

$$h(x, y) = \frac{\rho_l(x, y)}{y^k} + \rho''_{l-k+1}(x, y) + \cdots,$$

и, таким образом,

$$F'(x, y) - F''(x, y) \equiv 0 \pmod{(g(x_i y))}.$$

Продолжая этот процесс, мы получим утверждение леммы.

Пусть теперь $k > 1$. Воспользовавшись предыдущим процессом, мы можем считать, что

$$F'(x, y) = \rho_{m+1}(x, y) + \dots .$$

Прибавляя к этому многочлену многочлен $g(x, y)^m$, мы получим многочлен

$$F''(x, y) = y^m + \dots .$$

Отсюда следует существование точки $P^{(1)}$, бесконечно близкой к точке P первого порядка, такой, что для кривой X', определяемой уравнением $F''(x, y) = 0$, имеем: $(X', P^{(1)}) = m$. То же самое рассуждение можно провести для точки $P^{(1)}$ и кривой X'.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\mathfrak{S}_3$ — кубическая кривая на плоскости, каждая точка которой либо неособая, либо является обыкновенной двойной точкой. Пусть $P_1, \dots, P_n$ — неособые точки этой кривой, а $k_1, k_2, \dots, k_n$ — целые неотрицательные числа. Предположим, что*

$$\sum_{i=1}^{n} (k_i + 1) = 9$$

и

$$s\left(\sum_{i=1}^{n} (k_i + 1) P_i\right) = \varepsilon_m,$$

где ε_m — точка m-го порядка в группе неособых точек кривой $\mathfrak{S}_3$. Тогда для любого целого $m > 0$ существует пучок Альфана

$$m\mathfrak{S}_3 - \sum mP_i^{(k_i)}.$$

Пусть теперь на кривой $\mathfrak{S}_3$ заданы точки $P_1, \dots, P_n$, среди которых есть особые (скажем, P_j, $j = 1, \dots, r$, $r \leqslant 3$). Пусть $k_1, \dots, k_r$ — положительные, а $k_{r+2}, \dots, k_n$ — неотрицательные целые числа. Если кривая $\mathfrak{S}_3$ неприводима и $k_1 < 8$, то пусть A_1 — произвольная точка на этой кривой; если кривая $\mathfrak{S}_3$ распадается на 3 прямые, то пусть A_j $(j = 1, \dots, r)$ — произвольные точки, лежащие на компонентах, не проходящих через точки P_j соответственно. Если, наконец, $\mathfrak{S}_3$ распадается на квадрику и прямую, то пусть A_j $(j = 1$ или $j = 1, 2)$ — точка на квадрике, если $k_j = 1, 3, 5$; на прямой, если $k_j = 4, 6$, и произвольная, если $k_j = 2$. Предположим, что во всех случаях

$$\sum_{i=1}^{n} (k_i + 1) = 9$$

и

$$s\left(\sum_{i=r+1}^{n} (k_i + 1) P_i - \sum_{j=1}^{r} A_j\right) = \varepsilon_m.$$

Тогда для любого целого $m > 0$ существует пучок Альфана

$$m\mathfrak{G}_3 - \sum_{i=1} mP_i^{(k_i)},$$

для которого точки A_j будут ассоциированы относительно особых точек P_j $(j = 1, \ldots, r)$.

Доказательство. Докажем сначала первую часть теоремы. Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — неособые точки кривой $\mathfrak{G}_3$. По условию,

$$s\left(\sum_{i=1} (k_i + 1)P_i\right) = \varepsilon_m.$$

Отсюда имеем

$$s\left(m\sum_{i=1}^{n} (k_i + 1)P_i\right) = 0,$$

а так как в силу предложения 1 гоморфизм s является изоморфизмом на дивизорах нулевой степени кривой $\mathfrak{G}_3$, то

$$\sum_{i=1}^{n} m(k_i + 1)P_i \sim 3m(\mathfrak{D} + \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2),$$

где $\mathfrak{D} + \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_3$ — неособый цикл, высекаемый на кривой $\mathfrak{G}_3$ прямой. Так как система дивизоров, высекаемая на кривой формами фиксированной степени, полна [см. ([9])], то существует такая кривая X, которая высекает дивизор

$$\sum_{i=1}^{n} m(k_i + 1)P_i.$$

Следовательно,

$$i(\mathfrak{G}_3, X, P_i) = m(k_i + 1).$$

Пусть уравнение кривой $X : F_{3m}(x, y) = 0$. Воспользовавшись предыдущей леммой, мы можем считать, что существует такая точка $P_1^{(k_1)}$, что

$$(X,\ P_1^{(k_1)}) = m.$$

Если теперь применить лемму к точке P_2, то мы получим существование такой точки $P_2^{(k_2)}$, что $(X, P_2^{(k_2)}) = m$, но к сожалению, предыдущее свойство в точке P_1 кривая X может потерять. Поэтому предыдущую лемму применить сразу ко всем точкам нельзя. Пусть кривая X имеет в точке P_2 l — кратную точку. Допустим сначала, что $k_2 = 0$. В этом случае рассмотрим пучок кубических кривых, проходящих через точку $P_1^{(k_1)}$, точку P_2 и произвольные другие точки, отличные от этих двух, и пучок кубических кривых, проходящих через точки $P_1^{(k_1)}$ и произвольные другие точки, отличные от точек P_1 и P_2. Будем увеличивать кратность кривой X в точке P_2 тем же приемом, как и в доказательстве предыдущей леммы, беря за полином $h(x, y)$ произведении $(l - k)$ подходяще выбранных кривых из первого пучка и $(m - l)$ кривых из второго пучка. Тогда особенность кривой X в точке P_1 не нарушится, а в точке P_2 мы сможем считать, что X имеет m-кратную точку. Аналогично, если $k_2 > 0$, то сначала мы добиваемся, чтобы кривая X имела в P_2 $m+1$-кратную точку, а потом к уравнению X прибавляем многочлен $\mathfrak{S}_3^m$; этим мы достигаем того, что кривая X будет проходить через некоторую точку $P_2^{(1)}$, причем $i(X\mathfrak{S}_3, P_2^{(1)}) = m$. После этого за первый пучок берем пучок $\mathfrak{S}_3 - P_1^{(k_1)} - P_2^{(1)} - \ldots$, а за второй — прежний пучок и добиваемся, чтобы $(X, P_2^{(1)}) = m$. Если $k_2 > 1$, то снова продолжаем этот процесс. Таким образом, мы можем считать, что существуют точки $P_1^{(k_1)}$ и $P_2^{(k_2)}$ такие, что

$$(X, P_1^{(k_1)}) = (X, P_2^{(k_2)}) = m.$$

Аналогично, если кратность кривой X в P_3 меньше m, то применяем аналогичный прием, беря за первый пучок пучок

$$\mathfrak{S}_3 - P_1^{(k_1)} - P_2^{(k_2)} - P_3,$$

а за второй пучок — пучок

$$\mathfrak{S}_3 - P_1^{(k_1)} - P_2^{(k_2)} - \ldots .$$

Снова считаем, что кратность X в P_3 равна m, а если $k_3 > 0$, то равна $m+1$. Прибавляя к X m-ую степень кривой $\mathfrak{S}_3$, мы получаем существование точки $P_3^{(1)}$, для которой

$$i(X, \mathfrak{S}_3, P_3^{(1)}) = m.$$

Далее, рассматриваем пучки

$$\mathfrak{S}_3 - P_1^{(k_1)} - P_2^{(k_2)} - P_3^{(1)}$$

и

$$\mathfrak{S}_3 - P_1^{(k_1)} - P_2^{(k_2)} - \ldots$$

и добиваемся, чтобы $(X, P_3^{(1)}) = m$. Продолжая этот процесс, мы получаем существование точки $P_3^{(k_3)}$, для которой

$$(X, P_3^{(k_3)}) = m.$$

Единственное затруднение может представить случай, когда $k_1 = k_2 = \ldots$ $\ldots = k_9 = 0$ и $m > 1$. В этом случае, пользуясь предыдущим приемом, мы можем считать, что $(X, P_i) = m$ для $i = 1, \ldots, 8$, и $(X, P_9) = l < m$. Если мы снова рассмотрим пучок

$$\mathfrak{S}_3 - \sum_{i=1}^{8} P_i - Q,$$

то точка Q не совпадает с точкой P_9 (в противном случае мы бы получили пучок Альфана $\mathfrak{S}_3 \sum_{i=1}^{9} P_i$, а значит, в силу теоремы 2,

$$s\left(\sum_{i=1}^{9} P_i\right) = 0,$$

что противоречит условию теоремы. Рассмотрим поэтому пучок

$$\mathfrak{G}_3 - \sum_{i=2}^{9} P_i - Q,$$

где $Q \neq P_1$, и пучок

$$\mathfrak{G}_3 - \sum_{i=2}^{8} P_i - Q' - Q'',$$

где Q', $Q'' \neq P_9, P_1$. Применим теперь к точке P_9 прием, использованный при доказательстве леммы 6, взяв за многочлен $h(x, y)$ произведение $(l-k)$ подходяще выбранных кривых из первого пучка и $(m-l)$ любых кривых из второго пучка. В результате мы получим $(l+1)$ кратную точку в P_9, m-кратные точки в $P_2, \ldots, P_8$, а в точке P_1 кривая X будет записываться в виде

$$0 = y^k + \rho_m(x, y) + \ldots .$$

Умножим уравнение кривой $\mathfrak{G}_3^k$ на $(m-k)$ произвольных кривых из пучка

$$\mathfrak{G}_3 - \sum_{i=2}^{9} P_i - Q, \qquad Q \neq P,$$

и вычтем полученную кривую из кривой X. В результате получим кривую X', для которой

$$(X', P_i) = m, \quad i = 1, \ldots, 8,$$
$$(X', P_9) = l + 1.$$

Если потребуется, то этот процесс можно продолжить до тех пор, пока мы найдем кривую X'' такую, что

$$(X'', P_i) = m, \quad i = 1, \ldots, 9.$$

Рассматривая теперь комбинацию кривых X и $m\mathfrak{G}_3$, получаем пучок

$$m\mathfrak{G}_3 - \sum_{i=1} mP_i^{(k_i)},$$

удовлетворяющий всем свойствам пучка Альфана, кроме, быть может, неприводимости. Для доказательства его неприводимости, рассмотрим поверхность, полученную после σ-процессов в точках $P_i^{(k_i)}$. Образ нашего пучка на этой поверхности задает регулярное отображение $\pi: V \to P^1$, общим слоем которого является кривая арифметического рода 1, быть может, приводимая. Пусть $r: B \to P^1$ — такое накрытие степени t прямой P^1, что общий слой отображения $\pi': V \times B \to B$ неприводим [см. ([1]), гл. 1, § 3]. Пусть $a \in P^1$, тогда

$$\pi^{-1}(a) = \sum_{b \in r^{-1}(a)} \pi'^{(b)}.$$

Рассматривая анти-σ-процессы в точках $P_i^{(k_i)}$, мы видим, что образ общей кривой пучка Альфана является объединением t неприводимых кривых, имеющих в каждой точке $P_i^{(k_i)}$ $p = \frac{m}{t}$-кратную особую точку (мы воспользовались тем фактом, что слои расслоения π' алгебраически эквивалентны). Отсюда следует, что образ каждой такой кривой вместе с кривой $p\mathfrak{G}_3$ образует пучок Альфана

$$p\mathfrak{G}_3 - \sum_{i=1}^{n} pP_i^{(k_i)},$$

а в силу теоремы 2

$$ps\Big(\sum_{i=1}^{n}(k_i+1)P_i\Big) = p\varepsilon_m = 0, \qquad p < m,$$

что противоречит условию теоремы.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть среди точек P_i есть особые точки. Разберем отдельные случаи.

1) $\mathfrak{G}_3$ — типа 1). Тогда

$$s\Big(\sum_{i=r}^{n}(k_i+1)P_i - A_1\Big) = \varepsilon_m,$$

откуда получаем:

$$\sum_{i=2}^{n} m(k_i+1)P_i \sim mA_1 + m(7-k_1)\mathfrak{D},$$

где $\mathfrak{D}$ — неособая точка перегиба кривой $\mathfrak{G}_3$ (см. предложение 1). Проведем через точки $\mathfrak{D}^{(6-k_1)}$, A_1 и P_1 кубическую кривую A_3 и пусть ее уравнение будет $A_3 = 0$. Предположим, что кривая A_3 проходит через точку $P_1^{(k_1)}$, причем $P_1^{(k_1)}$ принадлежит некоторой поверхности V, доминирующей P^2; $\varphi: P^2 \to V$ — каноническое отображение. Пусть $\mathfrak{G}_3'$ — полный образ кривой $\mathfrak{G}_3$ при этом отображении; образы точек $\mathfrak{D}$ и A_1 на $\mathfrak{G}_3$ мы будем обозначать теми же буквами. Точка $P_1^{(k_1)}$ является неособой точкой кривой $\mathfrak{G}_3'$. Собственный образ кривой mA_3 высекает цикл

$$mP_1^{(k_1)} + mA_1 + m(7-k_1)\mathfrak{D}.$$

Так как

$$mP^{(k_1)} + m\sum_{i=2}^{4}(k_i+1)P_i \sim mP_1^{(k_1)} + mA_1 + m(7-k_1)\mathfrak{D},$$

то цикл

$$mP_1^{(k_1)} + \sum_{i=2}^{n} m(k_i+1)P_i$$

также высекается некоторой кривой X [см. (9)]. Воспользовавшись леммой 6, мы можем считать, что кривая X имеет в точке $P_1^{(k_1)}$ m-кратную особую точку. Рассматривая образ кривой X на плоскости, мы получим существование такой кривой X' на плоскости, что

$$(X', P_1^{(k_i)}) = m,$$
$$i(X', \mathfrak{G}_3, P_i) = m(k_i + 1).$$

Воспользовавшись процессом, аналогичным проведенному выше, мы можем найти такую кривую X'', что

$$(X'', P_i^{(k_i)}) = m(k_i + 1),$$

где $P_i^{(k_i)}$ — некоторые бесконечно близкие точки к точкам P_i. Кривая X'' вместе с кривой $m\mathfrak{G}_3$ образуют пучок Альфана. Доказательство неприводимости аналогично предыдущему. Легко видеть, что точка A_1 ассоциирована с пучком Альфана.

2) $\mathfrak{G}_3$ — типа 2). Предположим сначала, что среди точек P_i только одна особая; обозначим ее через P_1. Имеем:

$$s\left(m\sum_{i=2}^{n}(k_i + 1)P_i - mA_1\right) = 0.$$

Пусть $k_1 = 1$. Рассмотрим кубическую кривую, проходящую через точки A_1, $\mathfrak{D}^{(1)}$, $\mathfrak{D}_1^{(1)}$, $\mathfrak{D}_2^{(1)}$ и некоторую точку $P_1^{(1)}$, где $\mathfrak{D}$ — произвольная точка на прямой, а $\mathfrak{D} + \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2$ высекается прямой L. Рассуждение, вполне аналогичное предыдущему, доказывает существование пучка Альфана

$$m\mathfrak{G}_3 - \sum_{i=1}^{n} mP_i^{(k_i)}.$$

В случае $k_1 = 2$ мы рассматриваем кубическую кривую, проходящую через точки A_1, $\mathfrak{D}^{(1)}$, $\mathfrak{D}_2^{(1)}$, $\mathfrak{D}$ и некоторую точку $P_1^{(2)}$; аналогичное исследование проводим для $k_1 = 3$ (см. определение ассоциированных пучков для пучка Альфана с кривой $\mathfrak{G}_3$ типа 2).

Пусть теперь P_1 и P_2 — особые точки кривой. Разберем для примера случай $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Остальные случаи разбираются аналогично. Имеем:

$$ms\left(\sum_{i=3}^{n}(k_i + 1)P_i - A_1 - A_2\right) = 0.$$

Рассмотрим кубическую кривую A_3, проходящую через точки A_1, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_1^{(1)}$. $\mathfrak{D}_2^{(1)}$ и некоторую точку $P_1^{(2)}$, и кубическую кривую A_3', проходящую через точки A_2, $\mathfrak{D}^{(1)}$, $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$ и некоторую точку $P_2^{(3)}$, если A_1 лежит на квадрике, и точки A_2, $\mathfrak{D}_1^{(1)}$, $\mathfrak{D}_2^{(1)}$ и некоторую точку $P_2^{(3)}$, если A_1 лежит на прямой.

Кривая $A_3 \cdot A_3'$ высекает цикл

$$A_1 + A_2 + P_1^{(2)} + P_2^{(3)} + 3\mathfrak{D} + 3\mathfrak{D}_1 + 3\mathfrak{D}_2$$

(в смысле, указанном выше). Так как

$$mP_1^{(2)} + mP_2^{(3)} + m\sum_{i=3} (k_i + 1)P_i + 3m(\mathfrak{D} + \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2) \sim$$

$$\sim mP_1^{(2)} + mP_2^{(3)} + mA_1 + mA_2 + 3m(\mathfrak{D} + \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2)$$

и второй цикл высекается кривой A_3^m, $A_3'^m$, то и первый цикл высекается некоторой кривой X. Но цикл $3m(\mathfrak{D} + \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2)$ высекается некоторой кривой X' (образ $3mL$ при каноническом отображении P^2 на поверхность V, на которой лежат точки $P_1^{(2)}$ и $P_2^{(3)}$). Покажем, что высекается и цикл

$$mP_1^{(2)} + mP_2^{(3)} + m\sum_{i=3}^{n} (k_i + 1)P_i.$$

Пусть $\mathfrak{G}_3'$ — полный образ кривой $\mathfrak{G}_3$ на V. Имеем:

$$D = mP_1^{(2)} + mP_2^{(3)} + m\sum_{i=3}^{n} (k_i + 1)P_i + 3m(\mathfrak{D} + \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2) = \mathfrak{G}_3'\cdot X,$$

$$D' = 3m(\mathfrak{D} + \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2) = \mathfrak{G}_3'\cdot X',$$

Отсюда получаем:

$$D - D' = \mathfrak{G}_3\cdot(X - X').$$

Проекция дивизора $X - X'$ на P^2 есть дивизор, эквивалентный

$$m(A_3 + A_3') - 3mL,$$

который, в свою очередь эквивалентен положительному дивизору $3mL$. Отсюда следует, что линейная система на V

$$|X - X'| \neq \varnothing,$$

а значит, существует положительный дивизор на $\mathfrak{G}'$

$$D'' \sim D - D',$$

высекаемый кривой. Но система дивизоров кривой $\mathfrak{G}'$, высекаемых формами фиксированной степени полна, откуда следует, что дивизор $D - D'$ также высекается некоторой кривой X''.

3) $\mathfrak{G}_3$ — типа 3). Здесь доказательство аналогично предыдущему и принципиально новых рассуждений не содержит.

§ 4. Основная теорема

Теперь мы в состоянии доказать основную теорему.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $\pi: V \to P^1$ — *минимальная модель рациональной поверхности с пучком эллиптических кривых. Существует бирациональ-*

ное отображение $\varphi : V \to P^2$ *такое, что образ пучка эллиптических кривых поверхности* V *является пучком Альфана*

$$m\mathfrak{C}_3 - \sum_{i=1}^{n} mP_i^{(k_i)},$$

где $m\mathfrak{C}_3$ — *образ вырожденного слоя* π *максимальной кратности.*

Доказательство. Рассмотрим 3 случая, соответствующие возможным минимальным моделям поверхности V.

1. Минимальная модель V — проективная плоскость P^2. В этом случае, согласно следствию к лемме 1, образ пучка эллиптических кривых V является пучком кривых степени $3m$. В силу теоремы 1 в этот пучок входит m-я степень кубической кривой $m\mathfrak{C}_3$. Согласно результатам Нерона ([7]) и Кодаиры ([5]), кратный вырожденный слой поверхности с пучком эллиптических кривых односвязен и все компоненты входят в него с одинаковой кратностью. Отсюда следует, что кривая $\mathfrak{C}_3$ может иметь только обыкновенные двойные особые точки. В силу леммы 2, получающийся пучок на плоскости является пучком Альфана (для которого число n равно числу непересекающихся исключительных кривых на V, а точки $P_i^{(k_i)}$ — образы этих кривых при их стягивании).

2. Минимальная модель V — проективная квадрика $F_0 = P^1 \times P^1$. В этом случае, если F обозначает образ кривой пучка V, в силу лемм 1 и 3 имеем:

$$F \sim m(2s + 2b_0). \tag{1}$$

Как легко проверить, $l(2s + 2b_0) = 9$ (образующие пространства $L(2s + 2b_0)$ — это функции $x^i y^j$, $0 \leqslant i \leqslant 2$, $0 \leqslant j \leqslant 2$). Любая кривая на F_0, являющаяся пересечением нашей квадрики с любой другой квадрикой, входит в линейную систему $|2s + 2b_0|$. Так как линейная система таких кривых имеет тоже размерность 9 (линейная система в $P^{(3)}$, состоящая из всех квадрик имеет размерность 9, так как она порождается квадриками вида $x_0^i x_1^j x_2^k x_3^l = 0$, $i + j + k + l = 2$), то мы получаем, что любая кривая из $|2s + 2b_0|$ является кривой 4-го порядка в P^3, а в силу (1) кривая F имеет порядок $4m$. В силу следствия из леммы 2, пучок эллиптических кривых на $P^1 \times P^1$, полученный из пучка на V, имеет базисные точки в числе, равном числу непересекающихся исключительных кривых на V, и каждая такая точка является m-кратной особой точкой общей кривой пучка. Взяв любую из базисных точек за центр стереографической проекции $P^1 \times P^1 \to P^2$ (хотя бы одна базисная точка всегда существует, ибо, как замечалось в самом начале работы, на V существует по крайней мере одна исключительная кривая), мы получим, что образ пучка кривых $P^1 \times P^1$ на P^2 будет пучком кривых степени $3m$. Дальнейшее доказательство проводится так же, как в случае 1.

3. Минимальная модель V — поверхность F_2. В этом случае при тех же обозначениях имеем:

$$F \sim m(4s + 2b_2). \tag{2}$$

Отсюда следует, что

$$(F\cdot b_2)=m(4(s\cdot b_2)+2(b_2^2))=0.$$

Поверхность, полученная разрешением квадратичной особенности конуса 2-го порядка K в P^3, будет минимальной рациональной моделью, на которой будет лежать кривая (образ особой точки) с индексом самопересечения — 2. Но, как известно [см. ([1]), глава 5)], таким свойством обладает только F_2. Образ общего слоя F на K в силу свойства $(F\cdot b_2)=0$ не будет проходить через особую точку конуса. Кроме того, образ кривой $L\in|2s+b_2|$, являющейся образом рациональной кривой на $P^1\times P^1$ из того же семейства, что и прообраз b_2 при элементарном преобразовании $\mathrm{elm}\cdot F_0\to F_2$, при отображении $F_2\to K$ будет плоским сечением конуса. Так как

$$(L\cdot b_2)=2(s\cdot b_2)+(b_2{}^2)=0,$$

то можно говорить об $(L\cdot F)$ на конусе (мы сохраняем для образов L и F те же обозначения), который равен $4m$. Действительно, на F_2 имеем:

$$(L\cdot F)=m(2s+b_2)(4s+2b_2)=4m,$$

а F и L не пересекаются с b_2.

Таким образом, кривая F — общий слой пучка — будет кривой степени $4\,m$ в P^3. Воспользовавшись, как и в случае 2 стереографической проекцией из базисной точки пучка, получим пучок кривых степени $3m$ на плоскости P^2. Далее доказательство совпадает с доказательством для случая 1.

Теорема доказана полностью.

Следствие 1. *На рациональной поверхности с пучком эллиптических кривых имеется не больше одного кратного вырожденного слоя. Кратность этого слоя равна $m=(S\cdot F)$, где S — исключительная кривая на V, а F — произвольный слой.*

Доказательство. Если бы на V было больше одного кратного слоя, то воспользовавшись теоремой 4, мы получили бы на плоскости пучок вида

$$\lambda F^{n}_{\frac{3m}{n}}+\mu\,(\mathfrak{S}_3^{\frac{m}{n}})^n=0,$$

где $F^{n}_{\frac{3m}{n}}=0$ — уравнение образа слоя кратности n, который, очевидно, приводим, что противоречит неприводимости пучка на V (напомним, что, как замечалось в доказательстве теоремы 1, кратность любого слоя делит m).

Следствие 2 (теорема Бертини). *Любой пучок эллиптических кривых на плоскости бирациональным автоморфизмом последней может быть приведен к пучку Альфана. Два пучка Альфана с различными числами m не эквивалентны.*

Доказательство. Первое утверждение получается из следующей коммутативной диаграммы рациональных отображений:

$$\begin{tikzcd}
V' \arrow[rr, leftrightarrow, "r"] \arrow[d, "d"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_2"'] & & V \arrow[ddl, bend left, "\pi_3"] \\
P^2 \arrow[rr, leftrightarrow, "\psi"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & P^2 \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[dl, "\pi_4"] \\
& P^1 &
\end{tikzcd}$$

где π_1 — рациональное отображение проективной плоскости на проективную прямую, задаваемое исходным пучком эллиптических кривых; d — регуляризация этого отображения с помощью σ-процессов в базисных точках пучка [см. (1), гл. 1, § 2, теорема 1]; r — отображение поверхности V' на ее минимальную модель V; π_2 — регулярное отображение поверхности с пучком эллиптических кривых V' на прямую P^1; φ — отображение V на P^2, фигурирующее в теореме 4; π_3 — каноническое отображение поверхности с пучком эллиптических кривых V на прямую P^1; $\psi = \varphi \circ r \circ \circ d$ — искомый бирациональный автоморфизм P^2; π_4 — рациональное отображение P^2 на P^1, задаваемое пучком Альфана.

Второе утверждение следует из того факта, что число m, равное кратности единственного вырожденного кратного слоя поверхности с пучком эллиптических кривых, является инвариантом относительно бирациональных преобразований таких поверхностей.

Мы называем расслоение на эллиптические кривые $\pi : V \to B$ якобиевым, если существует регулярное сечение $s : B \to V$ такое, что $\pi \circ s = 1$. Легко показывается, что, если F — общий слой π, то

$$(s(B) \cdot F) = 1.$$

Отсюда следует, что π без кратных слоев.

Следствие 3. *Если $\pi : V \to P^1$ — минимальная модель рациональной поверхности с пучком эллиптических кривых, являющейся якобиевым расслоением, то существует бирациональное отображение $\varphi \cdot V \to P^2$ такое, что образ пучка поверхности V является пучком кубических кривых.*

Московский Государственный Университет

Поступило 26.V.1965

ЛИТЕРАТУРА

1 Алгебраические поверхности, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 75 (1965).

2 Bertini E., Ricerche sulle transformazioni univoche involutori del piano, Ann. mat. Ser. II, t. 8 (1877), 224—286.

3 Halphen M., Sur les courbes planes du sixiéme degré à neuf points doubles, Bull. Soc. math. France, X (1881), 162—172.

4 Kodaira K., On compact complex analytic surfaces. II, Ann. Math., 77, № 3 (1963), 563—626.

[5] Kodaira K., On compact analytic surfaces, сб. «Analytic functions Princeton» (1960), 121—135.
[6] Nagata M., On rational surfaces, I, Memoires of the Coll. of Sci, Univ. of Kyoto, A, v. 33, № 3 (1960); 271—293 (русский перевод: сб. «Математика» 8 : 1 (1964), 55—71).
[7] Neron A., Models minimaux du varieties abeliennes sur les corps globaux et locaux, Publ. Math. I.H.E.S., Paris, № 21 (1964), 1—126.
[8] Oort F., Reducible and multiple algebraic curves, Leiden, 1962.
[9] Rosenlicht M., Equivalence relations on algebraic curves, Ann. Math. 56, № 1 (1952), 169—191 (русский перевод: сб. «Математика», 5 : 1 (1961), 3—30).
[10] Rosenlicht M., Generalized Jacobian varieties, Ann. Math. 59, № 3 (1954), 505—530 (русский перевод: сб. «Математика», 6 : 2 (1962), 40—74).
[11] Serre J.-P., Groupes algebrique et corps de classes, Paris, Hermann, 1959.
[12] Уокер Р., Алгебраические кривые, М., ИЛ, 1952.