ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

37(1973), 833—847

УДК 513.6

И. В. ДОЛГАЧЕВ

О СПЕЦИАЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ К3-ПОВЕРХНОСТЯХ. I

И. Р. Шафаревичу к пятидесятилетию

В работе описываются алгебраические поверхности типа К3, обладающие гиперэллиптическими кривыми. Доказывается прямая и обратная теоремы о представлении таких поверхностей в виде двойной плоскости. Выясняется связь поверхностей этого типа с эллиптическими поверхностями.

Введение

Пусть k — алгебраически замкнутое поле характеристики $p\neq 2$. Алгебраическая проективная гладкая поверхность X над k называется К3-поверхностью, если X регулярна и канонический класс X тривиален, т. е. если $H^1(X, \mathcal{O}_X)=0$ и $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$. Назовем К3-поверхность специальной, если на ней существует гиперэллиптическая кривая C рода $g\geqslant 2$. Цель настоящей работы дать явное описание всех таких поверхностей. Мы показываем, что специальные К3-поверхности есть в точности те К3-поверхности, которые допускают представление в виде двойной плоскости (т. е. бирационально изоморфны аффинной поверхности в $\mathbf{A}_k^3$ с уравнением $z^2=F(x, y)$). Пусть π обозначает класс К3-поверхности X, т. е. наименьшую из больших единицы размерностей полных линейных систем на X. Мы показываем, что для специальных К3-поверхностей π может принимать только значения 2, 3, 4 или 5. Это дает ответ на вопрос из работы (²). Кроме того, при $\pi>2$ условие специальности эквивалентно условию существования на X пучка эллиптических кривых показателя $\leqslant 2$. В § 4 работы мы показываем, что универсальная накрывающая эллиптической поверхности Энриквеса (или любой поверхности Энриквеса, если $\mathrm{char}(k)=0$) является специальной К3-поверхностью.

Основой всех предыдущих результатов служит следующая

ТЕОРЕМА ЭНРИКВЕСА — КАМПЕДЕЛЛИ. *Двойная плоскость, бирационально изоморфная* К3-*поверхности, эквивалентна одной из следующих двойных плоскостей*:

а) $z^2=F_6(x, y)$, *где* $F_6(x, y)=0$ — *кривая степени* 6;

б) $z^2=F_8(x, y)$, *где* $F_8(x, y)=0$ — *кривая степени* 8, *имеющая две обыкновенные четверные особые точки (быть может, бесконечно близкие)*;

в) $z^2=F_{10}(x, y)$, *где* $F_{10}(x, y)=0$ — *кривая степени* 10, *имеющая семикратную особую точку и две обыкновенные тройные точки, бесконечно близкие к ней первого порядка*;

г) $z^2=F_{12}(x, y)$, *где* $F_{12}(x, y)=0$ — *кривая степени* 12, *имеющая девятикратную особую точку и три бесконечно близкие к ней первого порядка трехкратные обыкновенные точки.*

Доказательство этой теоремы было дано Энриквесом в 1896 г. ([8]) и позже она передоказывалась Кампеделли ([6]), ([7]). В настоящей работе приводится модернизация доказательства Кампеделли.

Продолжение этой работы будет посвящено модулям и автоморфизмам специальных К3-поверхностей.

§ 1. Основные определения и вспомогательные леммы

Определение 1.1. К3-*поверхностью* называется гладкая проективная алгебраическая поверхность X с $H^1(X, \mathcal{O}_X)=0$ и $\omega_X=\Omega^2_X\simeq\mathcal{O}_X$. К3-поверхность называется *специальной*, если на ней существует гладкая гиперэллиптическая кривая рода $g\geqslant 2$.

ЛЕММА 1.2. *Пусть* $D=\sum_i n_i D_i$ — *эффективный связный дивизор на* К3-*поверхности* X. *Предположим, что хотя бы для одного значения* i $n_i=1$. *Тогда*

$$\dim|D|\overset{\mathrm{def}}{=}\dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X(D))-1=\frac{(D^2)}{2}+1,$$

$$p_a(D)\overset{\mathrm{def}}{=}\dim_k H^1(D, \mathcal{O}_D)=\dim|D|.$$

Точная последовательность пучков

$$0\to\mathcal{O}_X(-D)\to\mathcal{O}_X\to\mathcal{O}_D\to 0$$

дает точную последовательность групп когомологий

$$0\to H^0(X, \mathcal{O}_X)\to H^0(D, \mathcal{O}_D)\to H^1(X, \mathcal{O}_X(-D))\to$$
$$\to H^1(X, \mathcal{O}_X)\to H^1(D, \mathcal{O}_D)\to H^2(X, \mathcal{O}_X(-D))\to H^2(X, \mathcal{O}_X)\to 0.$$

Так как X является К3-поверхностью, то

$$H^1(X, \mathcal{O}_X)=0, \quad H^2(X, \mathcal{O}_X)\simeq H^0(X, \omega_X)\simeq k.$$

С другой стороны, в силу условия на D,

$$H^0(D, \mathcal{O}_D)=k.$$

Следовательно,

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(-D))=0, \quad \dim_k H^1(D, \mathcal{O}_D)=\dim_k H^2(X, \mathcal{O}_X(-D))-1.$$

Остается воспользоваться теоремой Римана — Роха для пучка $\mathcal{O}_X(-D)$ и двойственностью Серра.

Определение 1.3. Число

$$\pi(X)=\min_{D\subset X}\{\dim|D|\,|\dim|D|>1\}$$

называется *классом* К3-поверхности X.

Замечания 1. В случае $k=\mathbf{C}$ класс $\pi(X)$ может принимать произвольное значение $\geqslant 2$ [см. ([1]), гл. IX]. По-видимому, это верно и в общем случае [ср. ([9]), стр. 256].

2. В книге ([1]) К3-поверхности назывались куммеровыми поверхностями. В настоящее время под последними понимают частный случай К3-поверхностей — неособые минимальные модели фактора двумерного абелевого многообразия относительно инволюции $x \to -x$. Произвольные К3-поверхности называются иногда обобщенными куммеровыми поверхностями (ср. ([9])). В работе ([2]) специальной куммеровой поверхностью называлась К3-поверхность, для которой класс π реализуется системой гиперэллиптических кривых. Наше определение, очевидно, несколько шире. Пример, показывающий, что эти определения различны, нам неизвестен.

Определение 1.4. Морфизм $f: X' \to X$ полных целостных алгебраических поверхностей называется *двулистным накрытием*, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

1) f индуцирует сепарабельное квадратичное расширение полей функций $k(X')/k(X)$.

2) Существует открытое подмножество $U \subset X'$ такое, что $f|U$ является конечным морфизмом степени 2.

3) Морфизм f разлагается в композицию $X' \xrightarrow{f_1} X_1' \xrightarrow{f_2} X$, где f_1 — бирациональный морфизм, а f_2 — конечный морфизм степени 2.

Доказательство эквивалентности утверждений 1)—3) использует стандартную технику теории схем (([10]), ch. 3) и не представляет труда.

Определение 1.5. *Двойной плоскостью* называется алгебраическая поверхность, бирационально изоморфная аффинной поверхности $\mathrm{Spec}(k[x, y, z]/(z^2 - F(x, y)))$.

Предложение 1.6. *Алгебраическая поверхность X является двойной плоскостью, если и только если она бирационально эквивалентна поверхности X, являющейся двулистным накрытием проективной плоскости $\mathbf{P}^2_k$.*

Доказательство очевидно.

ЛЕММА 1.7. *Пусть $g: X' \to X$ — двулистное накрытие гладких поверхностей. Тогда для любых дивизоров D_1 и D_2 на X имеем:*

$$(f^*(D_1) \cdot f^*(D_2))_{X'} = 2(D_1 \cdot D_2)_X.$$

Доказательство тривиально следует из общих свойств колец Чжоу.

ЛЕММА 1.8. *Если D — целостный дивизор на К3-поверхности, то линейная система $|D|$ не имеет базисных точек.*

Доказательство см. в ([1]), гл. VIII, лемма 2.

Предложение 1.9. *Пусть C — гиперэллиптическая кривая на К3-поверхности X с $p_a(C) = m$. Линейная система $|C|$ задает двулистное накрытие $f: X \to V$, где V — поверхность степени $m-1$ в $\mathbf{P}^m_k$.*

Доказательство см. в ([1]), гл. VIII, лемма 3.

Предложение 1.10. *Пусть $f: X' \to X$ — двулистное накрытие гладких поверхностей. Пусть $X' \xrightarrow{f_1} X_1' \xrightarrow{f_2} X$ — разложение Штейна для f* (**см.**

условие 3) *определения* 1.4). *Тогда особые точки поверхности X_1^* есть в точности прообразы особых точек кривой ветвления W конечного накрытия f_2.*

Действительно, поверхность X_1' нормальна и поэтому можно воспользоваться локальными свойствами конечных накрытий Галуа алгебраических многообразий [см. ([12])].

Определение 1.11. Кривая W из условия предложения 1.10 называется *кривой ветвления* двулистного накрытия.

Следствие 1.12. *Предположим, что кривая ветвления двулистного накрытия $f: X' \to X$ неособа и поверхность X' является минимальной моделью. Тогда f — конечный морфизм.*

ЛЕММА 1.13. *Пусть $f: X' \to X$ — конечный морфизм степени два нормальной поверхности X' на гладкую поверхность X. Предположим, что кривая ветвления W морфизма f имеет лишь обыкновенные двойные точки $P_1, \ldots, P_n$. Пусть $\overline{X} \to X$ — раздутие этих точек. Тогда нормализация $\widetilde{X}'$ поверхности $X' \times_X \overline{X}$ является гладкой поверхностью, а проекция $\widetilde{X}' \to \overline{X}$ индуцирует конечное накрытие, кривой ветвления которого является собственный прообраз кривой W.*

Это утверждение есть частный случай «метода Юнга» разрешения особенностей поверхностей. Его проверка сводится к тривиальным локальным вычислениям, которые мы опускаем.

§ 2. Теорема Энриквеса — Кампеделли

На протяжении этого параграфа через F_n мы будем обозначать относительно минимальную модель рациональной поверхности, обладающую рациональной кривой S_n с $(S_n^2) = -n$ (n — целое неотрицательное число, не равное 1) [см. ([1]), гл. 4]. Через L будем обозначать любой из слоев канонического морфизма $F_n \to \mathbf{P}_k^1$, сечением которого является кривая S_n.

Предложение 2.1. *Пусть $\varphi: X \to \mathbf{P}_k^m$ — морфизм нормальной проективной поверхности, образ которого $\varphi(X)$ является нормально вложенной поверхностью степени $m-1$. Тогда существует разложение*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & V \arrow[dl, "f"] \\ & \mathbf{P}_k^m & \end{tikzcd}$$

где f — бирациональный морфизм, а V — одна из следующих поверхностей: $\mathbf{P}_k^2$, F_n или поверхность $\overline{F}_n$, получающаяся стягиванием в нормальную точку кривой S_n на F_n.

Гиперплоское сечение поверхности $\varphi(X)$ является кривой степени $m-1$, нормально вложенной в $(m-1)$-мерное проективное пространство. Из теоремы Римана — Роха следует, что такая кривая рациональна.

В силу предложения 2 из работы ([4]) отсюда следует, что нормализация V поверхности $\varphi(X)$ является одной из перечисленных выше поверхностей. Так как поверхность X нормальна, то получаем требуемое утверждение.

ЛЕММА 2.2. *Пусть A — двумерное геометрическое регулярное локальное кольцо с полем вычетов k характеристики, отличной от 2. Пусть g — автоморфизм второго порядка кольца A. Тогда кольцо инвариантов A^g является либо регулярным, либо его пополнение $\hat{A}^g$ изоморфно пополнению локального кольца вершины квадратичного конуса.*

Очевидно, можно считать кольцо A полным, а следовательно, изоморфным кольцу $k[[x, y]]$. В этом случае действие g эквивалентно линейному и поэтому можно считать, что либо $g(x)=x$, $g(y)=-y$, либо $g(x)=-x$, $g(y)=-y$. В первом случае $A^g \simeq k[[x, y^2]]$ регулярно, а во втором $A^g \simeq k[[x^2, y^2, xy]] \simeq k[[u, v, w]]/(uv-w^2)$. Тем самым лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть X — специальная* К3-*поверхность. Тогда существует двулистное накрытие $f: X \to V$, где V — одна из следующих поверхностей:* $\mathbf{P}_k^2, F_0, F_n (n=2, 3, 4), \overline{F}_2$.

Пусть C — некоторая гиперэллиптическая кривая на X, m — ее род. Применяя предложения 1.9 и 2.1, мы получим двулистное накрытие $f: X \to V$, где V — либо $\mathbf{P}_k^2$, либо F_n, либо $\overline{F}_n$. Покажем, что случай $n>4$ невозможен, а для $n=3$ и $n=4$ морфизм $f: X \to \overline{F}_n$ пропускается через канонический морфизм $F_n \to \overline{F}_n$, стягивающий сечение S_n в особую точку.

Предположим, что имеет место первый случай, т. е. $V=F_n$ с $n>4$. Пусть $f: X \xrightarrow{\varphi_1} X' \xrightarrow{\varphi_2} F_n$ — разложение Штейна морфизма f (т. е. φ_1 бирационален, а φ_2 — конечный морфизм степени 2). Допустим, что морфизм φ_1 является изоморфизмом в некоторой окрестности $\varphi_2^{-1}(S_n)$. Тогда $f^{-1}(S_n)$ есть либо R_1+R_2, где R_i — рациональные кривые на X, либо $f^{-1}(S_n)$ — неприводимая кривая. В любом случае $(f^{-1}(S_n)^2) \geqslant -8$. Так как, с другой стороны, $(f^{-1}(S_n)^2) = -2n$, то отсюда получаем, что $n \leqslant 4$.

Пусть теперь $f^{-1}(S_n) = D_1 + \ldots D_r + R$, где $D_i (1 \leqslant i \leqslant r)$ — рациональные кривые (быть может, приводимые), стягивающиеся морфизмом φ_1 в различные особые точки X', лежащие на $\varphi_2^{-1}(S_n)$, а R — собственный прообраз $\varphi_2^{-1}(S_n)$. Имеем:

$$(f^{-1}(S_n)^2) = -2n = \sum_{i=1}^{r} (D_i^2) + 2\sum_{i=1}^{r} (D_iR) + R^2.$$

Снова очевидно, что R — либо неприводимая кривая, либо $R=R_1+R_2$, где R_i — рациональные кривые. В любом случае $(R^2) \geqslant -8$. Так как $(D_i^2) = -2$ (см. лемму 1.2), а $(D_iR) \geqslant 1$, то отсюда получаем:

$$n = r - \sum_{i=1}^{r} (D_iR) - \frac{(R^2)}{2} \leqslant 4.$$

Заметим, что здесь $n>0$ может быть только в случае $r=1$, $n=3$, $R_1=R_2$.

Предположим теперь, что имеет место второй случай: $V=\overline{F}_n$ $(n>2)$. Пусть P — особая точка поверхности $\overline{F}_n$. Если бы морфизм $f: X\to\overline{F}_n$ был конечным над окрестностью точки P, то локальное кольцо $\mathcal{O}_P$ было бы фактором регулярного кольца под действием группы 2-го порядка. В силу леммы 2.2 отсюда бы следовало, что P — либо неособая точка, либо обыкновенная двойная точка. Последнее, очевидно, противоречит тому, что $n>2$. Таким образом, $f^{-1}(P)$ — дивизор на X. В силу универсальности раздутий, мы получаем отсюда, что f разлагается в композицию $X\to F_n\to\overline{F}_n$. Теорема доказана.

Предложение 2.4. *Пусть $f: X\to F_0$ — двулистное накрытие с* K3-*поверхностью X. Тогда кривая ветвления W морфизма f имеет степень* (4,4). *Кроме того, на X существуют эллиптические кривые E_1 и E_2 с* $(E_1\cdot E_2)=2$, *для которых линейная система $|E_1+E_2|$ неприводима, и любая неособая кривая $D\in|E_1+E_2|$ является гиперэллиптической кривой рода* 3.

Пусть $L_1=L$ и $L_2=S_0$ — эффективные образующие $\mathrm{Pic}(F_0)$. Тогда $(f^{-1}(L_i)^2)=0$ и, следовательно, $|f^{-1}(L_i)|$ является пучком эллиптических кривых. Если $E_i (i=1,2)$ — неособые эллиптические кривые из этого пучка, то, очевидно, $(E_1\cdot E_2)=2(L_1\cdot L_2)=2$. Так как $((E_1+E_2)^2)=4$, то $\dim|E_1+E_2|=3$. Неприводимость системы $|E_1+E_2|$ очевидна. Для любой неособой кривой $D\in|E_1+E_2|$ пучок $|E_1|$ высекает на D линейный ряд g_2^1 размерности 1 степени 2. Следовательно, D — гиперэллиптическая кривая. Ее род равен $\left(\frac{D^2}{2}\right)+1=3$. Если W — кривая ветвления f, то $(L_i\cdot W)=4$, так как $f^{-1}(L_i)$ — эллиптическая кривая. Значит, $W\sim 4L_1+ +4L_2$, т. е. имеет степень (4,4).

Предложение 2.5. *Пусть $f: X\to F_2$ — двулистное накрытие с* K3-*поверхностью X. Тогда кривая ветвления W морфизма f эквивалентна дивизору $8L+4S_2$. Кроме того, на X существуют эллиптическая кривая E и две рациональные неособые кривые R_1 и R_2 с $(R_1\cdot R_2)=0$, $(R_1\cdot E)= =(R_2\cdot E)=1$. При этом линейная система $|2E+R_1+R_2|$ неприводима и любая неособая кривая $D\in|2E+R_1+R_2|$ является гиперэллиптической кривой рода* 3.

Так как $(L^2)=0$, то $|f^{-1}(L)|$ является пучком эллиптических кривых. Пусть $E\in|f^{-1}(L)|$ — неособая кривая из этого пучка. Так как $(S_2^2)=-2$, то $(f^{-1}(S_2)^2)=-4$. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 2.3, получаем, что $f^{-1}(S_2)=R_1+R_2$, где R_i изоморфны S_2 и $(R_1\cdot R_2)=0$. Так как $(E(R_1+R_2))=2(L\cdot S_2)=2$ и $(ER_i)>0$, то $(E\cdot R_1)=(E\cdot R_2)=1$. Рассмотрим линейную систему $|2E+R_1+R_2|$. В силу леммы 1.2,

$$\dim|2E+R_1+R_2|=\frac{(2E+R_1+R_2)^2}{2}+1=3.$$

Так как, с другой стороны, $\dim|2E+R_i|=2, i=1,2$, то $|2E+R_1+R_2|$ — неприводимая линейная система. Для любой неособой кривой $D\in|2E+ +R_1+R_2|$ пучок $|E|$ высекает на D линейный ряд размерности 1 и степени 2. Следовательно, D — гиперэллиптическая кривая. Ее род равен $\frac{(D^2)}{2}+1=3$.

Пусть $W\sim aL+bS_2$ — кривая ветвления морфизма f. Тогда $(W\cdot L)=4$, так как $|f^{-1}(L)|$ — пучок эллиптических кривых. С другой стороны, $(W\cdot(2L+S_2))=8$, так как $|f^{-1}\cdot(2L+S_2)|=|2E+R_1+R_2|$ — линейная система гиперэллиптических кривых рода 3. Элементарные вычисления показывают теперь, что $a=8$, а $b=4$.

Предложение 2.6. *Пусть $f:X\to F_3$ — двулистное накрытие с К3-поверхностью X. Тогда кривая ветвления морфизма f эквивалентна дивизору $10L+4S_3$. Кроме того, на X существуют эллиптическая кривая E и неособые рациональные кривые R_1 и R_2 с $(R_1\cdot R_2)=(R_1\cdot E)=1$, $(R_2\cdot E)=0$. При этом линейная система $|3E+2R_1+R_2|$ неприводима и любая неособая кривая $D\in|3E+2R_1+R_2|$ является гиперэллиптической кривой рода* 4.

Снова, как и в предыдущих предложениях, $|f^{-1}(L)|$ — пучок эллиптических кривых. Пусть E — одна из кривых этого пучка. Так как $(S_3^2)=-3$, то $(f^{-1}(S_3)^2)=-6$. Рассуждая так же, как в первой половине доказательства теоремы 2.3, мы получим, что $f^{-1}(S_3)=2R_1+R_2$. Здесь R_2 — исключительная кривая на X, отображаемая морфизмом f в точку, а $2R_1$ — собственный прообраз S_3. Так как $((2R_1+R_2)^2)=-8-2+4(R_1\cdot R_2)=-6$, то $(R_1\cdot R_2)=1$. Кроме того, $(E\cdot(2R_1+R_2))=2(L\cdot S_3)=2$, и так как, очевидно, $(R_2\cdot E)=0$, то $(E\cdot R_1)=1$. Рассмотрим теперь линейную систему $|3E+2R_1+R_2|$. Очевидно, что

$$\dim|3E+2R_1+R_2|=\frac{((3E+2R_1+R_2)^2)}{2}+1=4.$$

С другой стороны, $\dim|3E+R_1+R_2|<\dim|3E+2R_1|=3$. Следовательно, система $|3E+2R_1+R_2|$ неприводима. Для любой неособой кривой D из этой системы $(E\cdot D)=(E\cdot(3E+2R_1+R_2))=2$, значит, пучок $|E|$ высекает на D линейный ряд размерности 1 и степени 2. Таким образом, D — гиперэллиптическая кривая рода $\frac{(D^2)}{2}+1=4$.

Пусть $W\sim aL+bS_3$ — кривая ветвления морфизма f. Тогда $(W\cdot L)=4$, так как $|f^{-1}(L)|$ — пучок эллиптических кривых. С другой стороны, $(W\cdot(3L+S_3))=10$, так как $|f^{-1}(3L+S_3)|=|3F+2R_1+R_2|$ — линейная система гиперэллиптических кривых рода 4. Простые вычисления показывают теперь, что $a=10$, а $b=4$.

Предложение 2.7. *Пусть $f:X\to F_4$ — двулистное накрытие с К3-поверхностью X. Тогда кривая ветвления морфизма f эквивалентна дивизору $12L+4S_4$. Кроме того, на X существуют эллиптическая кривая E и неособая рациональная кривая R с $(R\cdot E)=1$. При этом линейная система $|4E+2R|$ неприводима и любая неособая кривая из этой системы является гиперэллиптической кривой рода* 5.

Доказательство полностью аналогично доказательствам двух предыдущих предложений, и мы его опускаем.

Предложение 2.8. *Пусть* $f: X \to \overline{F}_2$ — *двойное накрытие с* К3-*поверхностью* X. *Тогда существует двойное накрытие* $f': X \to V$, *где либо* $V = F_0$, *либо* $V = F_2$.

Пусть P — особая точка поверхности $\overline{F}_2$. Если $f^{-1}(P)$ является дивизором на X, то, в силу универсальности раздутий, морфизм f разлагается в композицию $X \to F_2 \to \overline{F}_2$, где $F_2 \to \overline{F}_2$ — стягивание сечения S_2 в особую точку. Если же морфизм f является конечным над некоторой окрестностью U точки P, то, в силу леммы 2.2, морфизм f неразветвлен над $U \setminus P$. Так как $\overline{F}_2$ изоморфно квадратичному конусу в $\mathbf{P}_k^3$, то мы можем считать, что f есть морфизм X на поверхность второго порядка в $\mathbf{P}_k^3$. Прообраз гиперплоского сечения $f(X)$ определяет линейную систему $|D|$ кривых рода $\pi = 3$. С другой стороны, прообраз гиперплоского сечения, проходящего через вершину конуса, определяет дивизор $E_1 + E_2$ из $|D|$. Так как $(D \cdot E_i) = 2$ (E_i — прообраз образующей конуса), то $(E_i^2) = 0$, $(E_1 \cdot E_2) = 2$. Значит, E_i — эллиптические кривые на X. Каждый пучок $|E_i|$ определяет морфизм $f_i: X \to \mathbf{P}_k^1$. Так как $(E_1 \cdot E_2) = 2$, то морфизм $f_1 \times f_2: X \to \mathbf{P}_k^1 \times \mathbf{P}_k^1 = F_0$ является искомым двулистным накрытием.

ТЕОРЕМА 2.9 (Энриквес — Кампеделли). *Специальная* К3-*поверхность бирационально эквивалентна одной из следующих* 4-*х типов двойных плоскостей:*

a) $z^2 = F_6(x, y)$, *где* $F_6(x, y) = 0$ — *кривая степени* 6;

b) $z^2 = F_8(x, y)$, *где* $F_8(x, y) = 0$ — *кривая степени* 8, *имеющая две обыкновенные четырехкратные особые точки* (*быть может, бесконечно близкие — случай* b');

c) $z^2 = F_{10}(x, y)$, *где* $F_{10}(x, y) = 0$ — *кривая степени* 10, *имеющая семикратную особую точку и две тройные обыкновенные особые точки, бесконечно близкие к ней первого порядка*;

d) $z^2 = F_{12}(x, y)$, *где* $F_{12}(x, y) = 0$ — *кривая степени* 12, *имеющая девятикратную особую точку и три бесконечно близкие к ней обыкновенные тройные точки.*

Доказательство. В силу теоремы 2.3 и предложения 2.8 существует двулистное накрытие $f: X \to V$, где V — одна из следующих поверхностей: $\mathbf{P}_k^2$, F_n ($n = 0, 2, 3, 4$).

Случай 1. $V = \mathbf{P}_k^2$. В этом случае для любой прямой L на $\mathbf{P}_k^2$ $(f^{-1}(L)^2) = 2(L^2) = 2$. Следовательно, линейная система $|f^{-1}(L)|$ состоит из кривых рода 2, а индекс пересечения прямой L с кривой ветвления равен 6. Таким образом, $\pi(X) = 2$, а кривая ветвления f имеет степень 6. Отсюда вытекает, что поверхность X бирационально эквивалентна двойной плоскости типа a).

Случай 2. $V = F_0$. В силу предложения 2.4 кривая ветвления W морфизма $f: X \to V$ имеет степень (4,4). Пусть P — некоторая точка на F_0, не принадлежащая W, $\widetilde{F}_0 \to F_0$ — раздутие P, $\widetilde{X} = X \times_{F_0} \widetilde{F}_0$, $\widetilde{f}: \widetilde{X} \to \widetilde{F}_0$ — проекция. Взяв композицию $\widetilde{f}$ с каноническим морфизмом $\widetilde{F}_0 \to \mathbf{P}_k^2$ (стягивание собственных прообразов на $\widetilde{F}_0$ образующих F_0, проходящих через P), мы получим двулистное накрытие $\widetilde{X} \to \mathbf{P}_k^2$. Кривая ветвления этого накрытия есть собственный образ W относительно бирационального отображения $F_0 \to \widetilde{F}_0 \to \mathbf{P}_k^2$ и является, очевидно, кривой степени 8 с двумя четырехкратными особыми точками (образы стягиваемых кривых на $\widetilde{F}_0$).

Так как поверхность $\widetilde{X}$ бирационально эквивалентна исходной поверхности X, то получаем, что X бирационально эквивалентна двойной плоскости типа b).

Случай 3. $V=F_2$. В силу предложения 2.5 кривая ветвления W морфизма $f: X \to V$ эквивалентна дивизору $8L+4S_2$.

Пусть P_1 и P_2 — различные замкнутые точки на F_2, не принадлежащие W. Пусть $\widetilde{F}_2 \to F_2$ — раздутие этих точек. Стягивая собственные образы образующих L_1 и L_2, проходящих через P_1 и P_2, мы получим двулистное накрытие поверхности $\widetilde{X}=X \times_{F_2} \widetilde{F}_2 \to F_0$, кривой ветвления $\widetilde{W}$ которого будет кривая степени (8,4) с двумя обыкновенными четырехкратными особыми точками, лежащими на сечении S_0. Пусть Q — одна из этих точек и L — образующая, проходящая через Q. Раздувая точку Q и стягивая собственные образы сечений S_0 и L, мы получим двулистное накрытие $\widetilde{\widetilde{X}}=\widetilde{X} \times_{F_0} \widetilde{F}_0 \to \mathbf{P}_k^2$ с кривой ветвления степени восемь с двумя бесконечно близкими четырехкратными особыми точками. Так как поверхности $\widetilde{\widetilde{X}}$ и X бирационально изоморфны, то получаем, что X бирационально изоморфна двойной плоскости типа b′).

Случай 4. $V=F_3$. В силу предложения 2.6 кривая ветвления W морфизма $f: X \to V$ эквивалентна дивизору $10L+4S_3$. В этом случае кривая W содержит в качестве одной из своих неприводимых компонент сечение S_3. Пусть $W'=W \setminus S_3$. Тогда $(W' \cdot S_3)=1$ и $(W' \cdot L)=3$. Делая элементарные преобразования в произвольных трех точках P_1, P_2, P_3, не лежащих на W, мы получим двулистное накрытие $\widetilde{f}: \widetilde{X} \to F_0$, где $\widetilde{X}$ бирационально эквивалентна X, а кривая ветвления $\widetilde{f}$ есть сечение S_0 и некоторая кривая W' степени (10,3) с тремя четырехкратными особыми точками на S_0. Делая теперь элементарное преобразование с центром в одной из этих особых точек, мы получим двулистное накрытие $X \times_{F_0} \widetilde{F}_0 \to \mathbf{P}_k^2$ с кривой ветвления степени 10 с семикратной особой точкой и двумя бесконечно близкими к ней обыкновенными тройными точками. Тем самым мы получаем случай c) теоремы.

Случай 5. $V=F_4$. В силу предложения 2.7 кривая ветвления W морфизма $f: X \to F_4$ эквивалентна дивизору $12L+4S_4$. В этом случае кривая S_4 входит в W, а кривая $W'=W-S_4$ с кривой S_4 не пересекается.

Проводя конструкцию, аналогичную случаю 4, мы получим случай d) теоремы.

Следствие 2.10. *Для любой специальной* K3-*поверхности класс* π *может принимать только значения* 2, 3, 4 *или* 5.

Действительно, прообраз прямой на двойной плоскости типа a) — d) является гиперэллиптической кривой рода 2, 3, 4 или 5.

Следствие 2.11. *Каждая специальная* К3-*поверхность с классом* $\pi=2$ (*соотв.* 3, *соотв.* 4, *соотв.* 5) *является двулистным накрытием* $\mathbf{P}_k^2$ (*соотв.* F_0 *или* F_2, *соотв.* F_3, *соотв.* F_4).

Как упоминалось в начале доказательства теоремы 2.9, каждая специальная К3-поверхность X является двулистным накрытием одной из поверхностей $\mathbf{P}_k^2$, F_0, F_2, F_3 или F_4. Если $\pi=2$, то линейная система $|C|$ кривых рода 2 определяет двулистное накрытие $X\to \mathbf{P}_k^2$. Если $\pi=3$, то линейная система $|C|$ кривых рода 3 определяет морфизм $f: X\to\mathbf{P}_k^3$, образ которого V является поверхностью 2-го порядка. Каждая такая поверхность является либо квадрикой F_0, либо конусом $\overline{F}_2$. Остается применить предложение 2.8. Если $\pi=5$, то X может отображаться двулистно только на F_4, так как в противном случае в силу предложений 2.4—2.6 на X существовала бы кривая меньшего рода. При $\pi=4$ морфизм $X\to\mathbf{P}_k^4$, определяемый системой кривых рода 4, должен пропускаться через одну из поверхностей F_n $(n=2, 3, 4)$ (см. доказательство теоремы 2.3). Случай $n=2$ невозможен в силу предложения 2.5. Случай $n=4$ невозможен, так как не существует вложения F_4 в $\mathbf{P}_k^4$.

§ 3. Обращение теоремы Энриквеса — Кампеделли

ЛЕММА 3.1. *Пусть* X — *нормальная алгебраическая поверхность и* D — *целостная кривая на* X, *образ которой в группе* $\mathrm{Pic}(X)$ *делится на два. Тогда существует неразветвленное неприводимое накрытие* $f: X'\to X\setminus D$ *степени* 2.

Воспользовавшись этальной топологией, рассмотрим на $U=X\setminus D$ точную последовательность Куммера ([3]):

$$0\to\Gamma(U, \mathcal{O}_U^*)/\Gamma(U, \mathcal{O}_U^*)^2\to H^1(U, \mu_2)\to \mathrm{Pic}(U_2)\to 0$$

(напомним, что $\mathrm{char}(k)\neq 2$). Так как поверхность X нормальна, то канонический морфизм ограничения $r: \mathrm{Pic}(X)\to\mathrm{Pic}(U)$ сюръективен, а его ядро порождается дивизором D. Так как класс D делится в $\mathrm{Pic}(X)$ на 2, то фактор-группа $\mathrm{Pic}(X)/\mathrm{Ker}(r)=\mathrm{Pic}(U)$ содержит элемент второго порядка. Значит,

$$H^1(U, \mu_2)\neq 0.$$

Остается воспользоваться тем фактом, что группа $H^1(U, \mu_2)$ классифицирует главные расслоения над U со структурной группой $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Нетривиальное такое расслоение и определяет искомое неразветвленное накрытие $f: X'\to U$.

ЛЕММА 3.2. *В обозначениях леммы* 1.13 *имеем*:

$$c_2(\widetilde{X}')=2(c_2(X)+n)+2\sum_{i=1}^{h}(g(W_i)-1),$$

где $c_2(Z)$ — *второе число Черна касательного пучка к поверхности* Z (= *топологической эйлеровой характеристике* Z *в случае* $k=C$ *и* = l-*адической эйлеровой характеристике в общем случае*), *а* $g(W_i)$, $1\leqslant i\leqslant h$, — *геометрический род неприводимой компоненты кривой ветвления* W.

Если $\overline{X}$ — раздутие двойных точек W на X, то $c_2(\overline{X})=c_2(X)+n$. Остается применить «формулу соответствия Севери» ([11]).

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть* $z^2=F_{2n}(x,y)$ $(n=3,4,5,6)$ — *двойная плоскость. Предположим, что кривая ветвления* $F_{2n}(x,y)=0$ *неприводима и, кроме особенностей, указанных в теореме* 2.9, *имеет только обыкновенные двойные точки. Тогда минимальная проективная неособая модель этой двойной плоскости является специальной* К3-*поверхностью с классом* $\pi\leqslant n-1$.

Доказательство. Пусть $n=3$, $W\subset \mathbf{P}_k^2$ — проективная кривая степени 6, неприводимая и имеющая только двойные обыкновенные особенности (или гладкая). В силу леммы 3.1 существует неразветвленное накрытие $U'\to U=\mathbf{P}_k^2\setminus W$ степени два. Очевидно, это накрытие можно продолжить до конечного морфизма $f:X\to \mathbf{P}_k^2$, разветвленного только над W [ср. ([12]), стр. 4]. Пусть V — раздутие $\mathbf{P}_k^2$ с центром в особых точках кривой W. В силу леммы 1.13 нормализация X' поверхности $X\times_{\mathbf{P}_k^2}V$ является неособой поверхностью, а проекция $f':X'\to V$ определяет конечное двулистное накрытие, разветвленное над собственным прообразом $\overline{W}$ кривой W. Пусть $L_1,\ldots,L_n$ — исключительные кривые на V, являющиеся прообразами особых точек W относительно проекции $V\to\mathbf{P}_k^2$. Имеем:

$$K_V=-3\overline{H}+L_1+\ldots+L_n,$$

где $\overline{H}$ — собственный прообраз прямой H на $\mathbf{P}_k^2$.

С другой стороны, очевидно, что $\overline{W}\sim 6\overline{H}-2L_1+\ldots+2L_n$. Отсюда следует [ср. ([11])], что $K_{X'}\sim f'^{*}(K_V)+\frac{1}{2}f'^{*}(\overline{W})\sim 0$. В силу леммы 3.2 $c_2(X')=2(3+n)+2(9-n)=24$. В силу формулы Нётера

$$1-q+p_g=\frac{c_2(X')+(K_{X'}^2)}{12},$$

откуда вытекает, что $q=\dim_k H^1(X,\mathcal{O}_{X'})=0$. Следовательно, поверхность X' регулярна и $K_{X'}\sim 0$, а это и есть определение К3-поверхности.

Пусть теперь $n=4$ и $W\subset\mathbf{P}_k^2$ — неприводимая проективная кривая степени 8, имеющая, кроме двух обыкновенных четырехкратных точек A_1 и A_2, быть может, еще обыкновенные двойные точки $P_1,\ldots,P_n$. Раздувая точки A_1 и A_2 на $\mathbf{P}_k^2$ и стягивая собственный прообраз прямой A_1A_2, мы получим, что собственный прообраз $\overline{W}$ кривой W на квадрике F_0 является неприводимой кривой типа (4,4), имеющей, быть может, двойные обыкновенные точки $P_1',\ldots,P_n'$. Остальная часть рассуждений проводится в этом случае аналогично предыдущему случаю (с заменой $\mathbf{P}_k^2$ на F_0).

Доказательства оставшихся случаев проходят по образцу предыдущих, и мы их опускаем. Заметим только, что при $n=4$ (случай бесконечно близких точек) придется $\mathbf{P}_k^2$ заменить на F_2, при $n=5$ — на F_3, при $n=6$ — на F_4 (ср. предложения 2.5, 2.6 и 2.7) и воспользоваться леммами 3.1 и 3.2.

Замечание 3.4. В случае $k=\mathbf{C}$ из результатов Г. Н. Тюриной [см. ([1]), гл. IX] легко следует, что для «общей» двойной плоскости типа a) (соотв. b) или b′), c), d)) (ср. теор. 2.9) $\pi=2$ (соотв. 3, 4, 5). По-видимому, это верно и в общем случае.

§ 4. Эллиптические поверхности и специальные К3-поверхности

Напомним некоторые определения.

Определение 4.1. *Пучком эллиптических кривых* на проективной алгебраической поверхности X называется морфизм $f: X \to B$, где B — гладкая кривая, а общий слой f является гладкой эллиптической кривой. Показателем пучка называется показатель общего слоя X_η морфизма f, т. е. общий наибольший делитель степени эффективных дивизоров на X_η, определенных над полем $k(B)$.

Пусть r: $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X_\eta)$ — канонический морфизм ограничения. Переходя к группам Нерона — Севери, имеем гомоморфизм $\bar{r}$: $\mathrm{NS}(X) \to \mathrm{NS}(X_\eta) \simeq \mathbf{Z}$. Легко видеть, что показатель пучка f на X равен порядку коядра гомоморфизма $\bar{r}$. Другими словами, он равен $\min\{(F \cdot C) \mid C$ — трансверальная кривая над B, F — произвольный слой $f\}$.

Определение 4.2. Гладкая проективная алгебраическая поверхность называется *эллиптической*, если на ней существует пучок эллиптических кривых. *Показателем* I эллиптической поверхности X называется минимальный из показателей всевозможных пучков эллиптических кривых на X.

ЛЕММА 4.3. *Для того чтобы алгебраическая* К3-*поверхность X была эллиптической поверхностью с показателем I, необходимо и достаточно, чтобы на X существовала связная кривая C с $p_a(C)=1$ и неприводимая кривая S с $(C \cdot S)=I$.*

Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности надо воспользоваться леммами 1.2 и 1.8 и рассмотреть морфизм $f: X \to \mathbf{P}_k^1$, определяемый линейной системой $|C|$.

ТЕОРЕМА 4.4. *Каждая специальная* К3-*поверхность X класса $\pi>2$ является эллиптической поверхностью. Кроме того, при $\pi=4$ или 5 показатель этой поверхности равен 1, а при $\pi=3$ он не превосходит 2.*

Доказательство. В силу 2.11 при $\pi=3$ (соотв. 4, соотв. 5) существует двулистное накрытие X на F_0 или F_2 (соотв. на F_3, соотв. на F_4). Остается применить лемму 4.3 и предложения 2.4 и 2.5 (соотв. 2.6, соотв. 2.7).

ТЕОРЕМА 4.5. *Каждая эллиптическая* К3-*поверхность с показателем $I \leqslant 2$ является специальной* К3-*поверхностью.*

Доказательство. Пусть $I=1$, а C и S — кривые на X, выбранные с помощью леммы 4.3. Так как $(S^2) \geqslant -2$, то

$$((4C+2S)^2) = 16(C \cdot S) + 4(S^2) = 16 + 4(S^2) \geqslant 8.$$

Кроме того,

$$((4C+2S)^2) > ((4C+S)^2) = 8 + (S^2),$$
$$((4C+2S)^2) > ((3C+2S)^2) = 12 + 4(S^2).$$

Таким образом, линейная система $|4C+2S|$ не имеет неподвижных компонент и состоит из кривых рода $g \geqslant 5$. Так как $(C^2)=0$, то

$$(C \cdot (4C+2S)) = 2.$$

Следовательно, пучок $|C|$ высекает на неособой кривой $D \in |4C+2S|$ линейный ряд g_2^1. Значит, D — гиперэллиптическая кривая и X — специальная К3-поверхность.

Пусть $I=2$. Линейная система $|C+S|$ не имеет неподвижных компонент и состоит из кривых рода

$$g = \frac{((C+S)^2)}{2} + 1 = \frac{4+(S^2)}{2} + 1 \geqslant 2.$$

Так как

$$(C(C+S)) = (C \cdot S) = 2,$$

то пучок $|C|$ высекает на неособой кривой $D \in |C+S)$ линейный ряд g_2^1. Следовательно, D — гиперэллиптическая кривая и X — специальная К3-поверхность.

Определение 4.6. *Поверхностью Энриквеса* называется гладкая алгебраическая поверхность X с $H^1(X, \mathcal{O}_X) = H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ и $\omega_X^{\otimes 2} \simeq \mathcal{O}_X$.

Предложение 4.7. *Пусть X — поверхность Энриквеса. Тогда существует конечное неразветвленное накрытие степени 2 $f: X' \to X$, где X' — К3-поверхность.*

Так как $\omega_X \not\simeq \mathcal{O}_X$, то пучок ω_X определяет элемент второго порядка в группе $\mathrm{Pic}(X)$. В силу точной последовательности Куммера:

$$0 \to H^0(X, \mathcal{O}_X^*)/H^0(X, \mathcal{O}_X^*)^2 \to H^1(X, \mu_2) \to \mathrm{Pic}(X_1) \to 0$$

мы получаем, что $H^1(X, \mu_2) \neq 0$. Так как группа $H^1(X, \mu_2)$ классифицирует главные однородные пространства со структурной группой $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, то такое нетривиальное пространство определяет конечное неразветвленное двойное накрытие $f: X' \to X$. Элементарные вычисления [см. ([11])] показывают, что $\omega_{X'} \simeq f^*(\omega_X) \simeq \mathcal{O}_{X'}$ и $H^1(X', \mathcal{O}_{X'}) = 0$. Следовательно, X' — К3-поверхность.

ЛЕММА 4.8 (Л. Годо). *Пусть X — эллиптическая поверхность с $H^1(X, \mathcal{O}_X) = H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, $f: X \to \mathbf{P}_k^1$ — соответствующий пучок эллиптических кривых, F — произвольный слой над замкнутой точкой, $\Gamma_1 \sim \frac{1}{m_1} F, \ldots, \Gamma_n \sim \frac{1}{m_n} F$ — «носители» кратных слоев f. Тогда*

$$\omega_X \simeq \mathcal{O}_X((n-1)F - \Gamma_1 - \ldots - \Gamma_n).$$

Пусть $\omega_X = \mathcal{O}_X(K_X)$. Так как $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, то для любого целостного дивизора D с $p_a(D) = 1$ имеем: $\dim|D+K| = 0$. Пусть D' обозначает однозначно определяемый эффективный дивизор из линейной системы $|D+K|$. В частности, $F' = \lambda_1\Gamma_1 + \ldots + \lambda_n\Gamma_n$, где $\lambda_i < m_i$ (так как $H^2(X, \mathcal{O}_X) = H^0(X, \omega_X) = 0$).

С другой стороны, так как $F' = (m_1 - 1)\Gamma_1 + \Gamma_1'$, то $\Gamma_1 = (\lambda_1 - m_1 + 1)\Gamma_1 + \ldots + \lambda_n\Gamma_n$. Отсюда получаем: $\lambda_1 - m_1 + 1 \geqslant 0$, что дает $m_1 - 1 \leqslant \lambda_1$, и так как $\lambda_1 < m_1$, то $\lambda_1 = m_1 - 1$. Аналогично доказываются равенства $\lambda_i = m_i - 1$.

Окончательно получаем:

$$K_X \sim F' - F \sim (m_1 - 1)\Gamma_1 + \ldots + (m_n - 1)\Gamma_n - F \sim$$
$$\sim (n-1)F - \Gamma_1 - \ldots - \Gamma_n.$$

Следствие 4.9. *В обозначениях предыдущей леммы если $\omega_X^{\otimes 2} \simeq \mathcal{O}_X$, то $n = 2$, $m_1 = m_2 = 2$ и*

$$\omega_X \simeq \mathcal{O}_X(\Gamma_1 - \Gamma_2).$$

Имеем:

$$\mathcal{O}_X \simeq \omega_X^{\otimes 2} \simeq \mathcal{O}_X((2n-2)F - 2\Gamma_1 - \ldots - 2\Gamma_n) =$$
$$= \mathcal{O}_X((n-2)F + (m_1 - 2)\Gamma_1 + \ldots + (m_n - 2)\Gamma_n).$$

Так как все $m_i \geqslant 2$, то $n = 2$ и $m_i = 2$. Кроме того,

$$\omega_X \simeq \mathcal{O}_X(F - \Gamma_1 - \Gamma_2) \simeq \mathcal{O}_X(\Gamma_1 - \Gamma_2).$$

ТЕОРЕМА 4.10. *Пусть X — эллиптическая поверхность Энриквеса. Тогда существует двойное конечное неразветвленное накрытие $f: X' \to X$, где X' — специальная* K3*-поверхность.*

Доказательство. Пусть f — накрытие, построенное в лемме 4.1. Покажем, что X' — специальная K3-поверхность. Пусть J — якобиева поверхность для F [(1), гл. VI]. Легко видеть, что J — рациональная поверхность [ср. (5)]. Значит, группа Шафаревича $Ш(J_\eta)$ общего слоя J тривиальна. Пользуясь теорией Огга — Шафаревича, мы получаем, что группа главных однородных пространств $WC(J_\eta)$ есть прямая сумма групп «локальных инвариантов» $WC(J_\eta) = \bigoplus_{x = P_k^1(k)} H^1(J_x, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

В силу следствия 4.9 поверхность X определяет в $WC(J_\eta)$ элемент X_η вида (α, β), где $2\alpha = 2\beta = 0$. Следовательно, порядок X_η в этой группе равен 2. Так как показатель X_η равен порядку (13), то X_η имеет над квадратичным расширением $k(\eta)$ рациональную точку. Композиция $X' \to X \to \mathbf{P}_k^1$ определяет на X' структуру эллиптической поверхности. Так как, очевидно, показатель X'_η не превосходит показателя X_η, то заключаем, что X' — эллиптическая К3-поверхность показателя $\leqslant 2$. Остается применить теорему 4.5.

Замечания. 1) В случае $\mathrm{char}(k)=0$ можно показать, что каждая поверхность Энриквеса является эллиптической поверхностью [см. ([1]), гл. X]. По-видимому, это верно и в общем случае.

2) Можно показать, что для эллиптической поверхности Энриквеса X подгруппа кручения $\mathrm{Tors}(\mathrm{Pic}(F))\simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Так как, кроме того, $H^1(X, \mathcal{O}_X)=0$, то из теории Куммера и Шрейера следует, что поверхность X', построенная в теореме 4.4, является единственным неразветвленным абелевым конечным накрытием X. В характеристике 0 этот факт тривиально следует из односвязности К3-поверхности.

3) Эллиптическая поверхность Энриквеса X называется специальной [ср. ([1]), гл. X], если существует квазисечение степени 2, являющееся рациональной кривой. В этом случае двойную плоскость, соответствующую К3-поверхности X', можно построить явно. Она имеет вид $z^2=F_3(x,y)\cdot F_3'(x,y)$, где $F_3(x,y)=0$ и $F_3'(x,y)=0$ — кубические кривые. В общем случае для поверхности X' $\pi\leqslant 3$.

Поступило
14.IX.1972

Литература

[1] Алгебраические поверхности, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 75 (1965).

[2] Авербух Б. Г., О специальных типах поверхностей Куммера и Энриквеса, Изв. АН СССР. Сер. матем., 29 (1965), 1095—1118.

[3] Артин М., Накрывающие когомологии схем, Успехи матем. наук, 20, вып. 6 (1965), 13—18.

[4] Гизатуллин М. Х., Об афинных поверхностях, пополняемых неособой рациональной кривой, Изв. АН СССР. Сер. матем., 34 (1970), 778—802.

[5] Долгачев И. В., О гипотезе Ф. Севери относительно односвязных алгебраических поверхностей, Докл. АН СССР, 170, № 2 (1966), 249—252.

[6] Campedelli L., Sopra i piani doppi con tutti i generi uguali all'unita, Rendiconti del Sem. Padova, 11, N 1—2 (1940), 1—27.

[7] Campedelli L., Le superficie con i generi uguali all'unita rapresentabili in infiniti modi sul piano doppio, Rendiconti del Sem. Univ. Roma, s. V, 1 (1940), 105—138.

[8] Enriques F., Sui piani doppi di genere uno Memorie della Soc. Ital. des Scienze, ser. III, t. X (1896), 201—222.

[9] Enriques F., Le superficie algebriche, Bologna, 1949.

[10] Grothendieck A., Elements de géometrie algébrique, Publ. Math. IHES, № 17 (1963).

[11] Iversen B., Numerical invariants and multiple planes, Amer. J. Math., 92, № 4 (1970), 968—996.

[12] Popp H., Fundamentalgruppen algebraischer Mannigfaltigkeiten, Lecture Notes in Math., vol. 176, Springer, 1970.

[13] Шафаревич И. Р., Главные однородные пространства, определенные над полем функций, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 64 (1961), 316—346.