B. Yu. Weisfeiler, I. V. Dolgachev, Unipotent group schemes over integral rings, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1974, Volume 38, Issue 4, 757–799

СЕРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ТОМ 38, № 4, 1974

УДК 519.4

Б. Ю. ВЕЙСФЕЙЛЕР, И. В. ДОЛГАЧЕВ

УНИПОТЕНТНЫЕ СХЕМЫ ГРУПП НАД ЦЕЛОСТНЫМИ КОЛЬЦАМИ

В работе изучаются семейства унипотентных алгебраических групп над целостными кольцами. Основные результаты относятся к геометрии таких семейств. В частности, доказывается, что при некоторых предположениях пространство такого семейства изоморфно аффинному пространству над базой. Приводятся контрпримеры, показывающие, что в случае произвольного базисного кольца перестают быть верными основные факты теории унипотентных алгебраических групп над полем. Для некоторого класса рассматриваемых групповых схем доказываются результаты о когомологиях, расширениях и деформациях.

Введение

Настоящая работа посвящена исследованию семейств унипотентных алгебраических групп, параметризованных аффинной целостной схемой S (или, более точно, унипотентных схем групп над S в смысле (0.8)). Общая теория схем групп была заложена в семинаре Гротендика и Демазюра (SGAD), в котором, помимо прочего, изучались семейства редуктивных групп.

Теория унипотентных и в особенности коммутативных унипотентных групп над полем представляет красивую завершенную теорию (см., например, ([7])). С другой стороны, вопросы о семействах унипотентных групп естественно возникают в теории квазиэллиптических алгебраических поверхностей ([11]). Кроме того, унипотентные группы играют важную роль при изучении строения аффинных групп над полем и такой же роли можно ожидать от них над произвольнами схемами. Любопытно отметить также, что изучение унипотентных схем групп привело к интересным вопросам из геометрии аффинных многообразий (см., в частности, п. 3.8.5).

Большинство результатов этой работы предполагает, что базисная схема есть спектр кольца дискретного нормирования. Примеры § 6 показывают, что свойства унипотентных схем групп над общими целостными кольцами во многом патологичны (что, впрочем, неудивительно в свете работ Рейно ([12])).

Как известно, теория унипотентных групп над полем интересна только в положительной характеристике. Согласно результату Рейно это справедливо и в общем случае: над схемами характеристики 0 теория тривиальна.

Основное свойство унипотентных групп над полем состоит в существовании композиционного ряда из элементарных групп (т. е. подгрупп аддитивной группы поля). Как показывают примеры из § 6, единственным аналогом этого свойства над общими целостными кольцами является теорема о линейной унипотентности (§ 1). Если базисное кольцо есть кольцо дискретного нормирования, то можно доказать более сильное утверждение о продолжении композиционного ряда с общего слоя до плоского ряда над кольцом (см. § 4).

В § 2 мы изучаем координатное кольцо унипотентной схемы групп над кольцом дискретного нормирования. Результаты этого параграфа играют основную роль в изучении геометрии таких групп. Каждая такая группа задается при некоторых ограничениях на общий слой в виде полного пересечения в аффинном пространстве. Если базисное кольцо равнохарактеристическое и группа является коммутативной гладкой периода p со связными слоями, то она становится $\mathbf{A}_S^n$ над некоторым радикальным расширением базы (теорема 3.5). Этот результат обобщает известный классический результат. Обсуждение некоторых естественных обобщений этого результата проводится в п. 3.8.

В § 4 мы показываем, что гладкие связные группы поднимаются с совершенного поля характеристики p до унипотентных схем групп над кольцами характеристики 0. Там же найдены расширения $\mathbf{G}_n$ с помощью $\mathbf{G}_a$. В § 5, используя стандартную когомологическую технику, мы вычисляем когомологии Гротендика коммутативных унипотентных схем групп.

В настоящее время (т. е. через год после завершения данной работы) мы уверены, что идеи, методы и результаты этой статьи применимы также при изучении моделей торов и полупростых групп. У нас имеется ряд примеров таких моделей. То, что унипотентные группы здесь по существу, видно, например, из следующего соображения: если G — модель тора (т. е. над общим слоем G — тор), то над некоторым замкнутым множеством G вырождается в унипотентную группу. Предварительные рассмотрения показывают, что методы §§ 2, 4 применимы к моделям группы G_m и дают аналогичные результаты. Кроме того, удалось вычислить расширения некоторых моделей G_m с помощью G_a (ср. п. 4.7) над равнохарактеристическими кольцами.

Мы благодарны В. И. Данилову за полезные обсуждения.

§ 0. Обозначения и напоминания

0.1. Пусть S — схема и (Sch/S) — категория S-схем. Групповой объект этой категории называется схемой групп над S ((SGAD), I, 2.1; см. также ([9]), § 11). Для любой S-схемы T и S-схемы групп G множество $G(T)=\mathrm{Hom}_S(T, G)$ является абстрактной группой, называемой группой T-точек G. Сопоставление $T \to G(T)$ определяет контравариантный функтор из категории Sch/S в категорию групп (Gr). Этот функтор часто отождествляется со схемой групп G.

Схемы групп над S образуют подкатегорию в Sch/S, морфизмами в ней служат гомоморфизмы схем групп, определяемые естественным образом.

0.2. Как и для всякой S-схемы, для S-схем групп применяется терминология теории схем. В частности, определены такие понятия как аффинная, плоская и гладкая S-схема групп.

0.3. Напомним, что если $S=\operatorname{Spec} A$, где A — поле, то любая S-схема плоская. Если же A — одномерное регулярное кольцо (например, кольцо дискретного нормирования), то условие плоскости схемы X конечного типа над S эквивалентно следующему ((6), гл. I, 2.4, предложение 3).

0.3.1. $\forall x\in X$ A-алгебра $\mathcal{O}_{X,x}$ не имеет кручения.

В общем случае, если базисная схема S регулярна, то условие плоскости схемы X локально конечного типа над S эквивалентно следующему:

0.3.2. Слои X_s, $s\in S$, имеют одинаковую размерность ((EGA), IV, 14.4.4, 15.4.2).

Заметим, что слои плоского морфизма $f: X\to S$, где S связна, имеют одинаковую размерность.

0.4. В случае, когда базисная схема S локально нетерова, условие гладкости схемы X локально конечного типа над S состоит в следующем ((EGA), IV, 17.5.2): X — плоская S-схема и $\forall s\in S$ слой X_s является гладкой схемой над полем вычетов $k(s)$ точки s.

Как известно, гладкость схемы групп над полем k эквивалентна ее геометрической приведенности ((7), II, № 5, 2.1). В силу теоремы Картье ((7), II, § 6, 1.1), если S — схема характеристики нуль (т. е. $\mathbf{Q}$-схема), то любая плоская S-схема групп является гладкой S-схемой.

0.5. Пусть G — аффинная S-схема групп. Предположим, что $S=\operatorname{Spec} A$ — аффинная схема. Тогда G также аффинна, т. е. $G=\operatorname{Spec} B$, где B — A-алгебра.

Кольцо $B=\Gamma(G, \mathcal{O}_G)$ обозначается через $A[G]$ и называется координатным кольцом аффинной A-схемы групп G. Структура схемы групп на схеме G эквивалентна в этом случае заданию на B структуры A-биалгебры. Последняя определяется заданием трех гомоморфизмов A-алгебр:

$$\mu: B\to B\otimes_A B \quad (\text{«коумножение»}),$$

$$\iota: B\to B \quad (\text{«кообращение»}),$$

$$\varepsilon: B\to A \quad (\text{«коединица»}),$$

для которых выполнены стандартные аксиомы ((SGAD), I, 4.2, см. также (9)).

0.5.1. Если $f: G\to S$ — плоская S-схема групп конечного типа над S и $f_*(\mathcal{O}_G)$ — плоский $\mathcal{O}_S$-Модуль, то на $G'=\operatorname{Spec}(f^*(\mathcal{O}_G))$ существует структура аффинной плоской S-схемы групп, для которой канонический гомоморфизм $u: G\to G'$ является гомоморфизмом. Схема G' называется аффинизацией схемы групп G. В силу результата Рейно ((12), VII, 3.2)

аффинизация определена в случае, когда S регулярна и $\dim S \leqslant 2$. Кроме того, в этом случае если G квазиаффинна, то гомоморфизм $u: G \to G'$ является открытым вложением ([12], VII, 3.1).

0.5.2. В силу результатов Рейно ([12], VII, 2.2), если S — нормальная схема и G — гладкая S-схема групп со связными слоями, слои которой над максимальными точками (общими точками неприводимых компонент S) являются аффинными, то G квазиаффинна.

0.6. Пусть G — схема групп над полем k и G^0 — связная компонента G, содержащая единицу. Тогда G^0 геометрически связна ((SGAD), VI_A, 2.1.1).

Для любой S-схемы групп G обозначим через G^0 подмножество в G, являющееся объединением связных компонент слоев G^0 для $s \in S$. Если G^0 открыто (например, когда G гладка над S (SGAD), VI_A, 3.10)), то соответствующая подсхема обозначается через G^0 и называется связной компонентой единицы G. Она является S-схемой групп и для любой S-схемы T

$$G^0(T) = \{u \in G(T) : \forall t \in T \text{ образ } u \text{ в } G_t(t) \text{ принадлежит } G_t^0(t)\}.$$

Очевидно, $G = G^0$, если и только если слои G связны.

0.7. Напомним теперь некоторые определения и свойства унипотентных алгебраических групп над полем (при этом под алгебраическими группами мы понимаем схемы групп конечного типа над полем, не обязательно гладкие).

0.7.1. Алгебраическая группа G над полем k называется унипотентной, если выполнены следующие эквивалентные условия:

а) G аффинна и в $k[G]$ существуют такие образующие $t_1, \ldots, t_n$, что $\mu(t_i) = t_i \otimes 1 + 1 \otimes t_i + \Sigma a_{ij} \otimes b_{ij}$, где $a_{ij}, b_{ij} \in k[t_1, \ldots, t_{i-1}]$ (ср. ([16]), гл. VII, n° 1.6, замечание 2).

б) G обладает композиционным рядом, последовательные факторы которого изоморфны подгруппам $\mathbf{G}_{a,k}$ (ср. (SGAD), XVII, 3.5, 1.5).

0.7.2. Примеры.

а) $\mathbf{G}_{a,k}$ — аддитивная группа;

$$k[\mathbf{G}_{a,k}] = k[t], \quad \mu(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t,$$
$$\iota(t) = -t, \quad \varepsilon(t) = 0.$$

б) $\alpha_{q,k}$, $q = p^r$, $p = \mathrm{char}\, k > 0$;

$$k[\alpha_{q,k}] = k[t]/(t^q), \quad \mu(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t.$$

в) $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k$, $p = \mathrm{char}\, k > 0$;

$$k[(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k] = k[t]/(t^p - t), \quad \mu(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t.$$

г) Формы $\mathbf{G}_{a,k} = \mathrm{char}\, k > 0$;

$$k[G] = k[t_1, t_2], \quad t_1^{p^n} = a_0 t_2 + a_1 t_2^p + \ldots + a_m t_2^{p^m},$$
$$a_0 \neq 0, \quad a_i \in k, \quad \mu(t_i) = t_i \otimes 1 + 1 \otimes t_i,$$
$$\iota(t_i) = -t_i, \quad \varepsilon(t_i) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Согласно ([15]) эти уравнения задают все k-формы $\mathbf{G}_{a,k}$. Они тривиальны, если k совершенно. Если $a_0 = 1$, то $k(a_1^{p^{-n}}, \ldots, a_m^{p^{-n}})$ — минимальное (чисто несепарабельное) поле разложения для G.

д) Двумерные гладкие связные группы.

Обозначим

$$\Phi_r(x) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p^r-1} C_{p^r}^i x^i \otimes x^{p^r-i} \in \mathbf{Z}[x] \otimes \mathbf{Z}[x].$$

Положим

$$k[G] = k[t_1, t_2], \quad \mu(t_1) = t_1 \otimes 1 + 1 \otimes t_1,$$
$$\mu(t_2) = t_2 \otimes 1 + 1 \otimes t_2 + \sum a_i \Phi_i(t_1), \quad a_i \in k.$$

Любая унипотентная двумерная связная гладкая группа задается такими формулами, если k совершенно ([16]), VII, 2.7, предложение 8).

е) Если k — поле характеристики 0, G — унипотентная групповая схема над k, то G — связная гладкая группа. Если $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, то для любой k-алгебры A группа $G(A)$ отождествляется с $\mathfrak{g}(A)$ при помощи отображения exp: $\mathfrak{g}(A) \to G(A)$, где для $x \in \mathfrak{g}(A)$

$$\exp x = \sum_0^\infty (\operatorname{ad} x)^i (i!)^{-1}$$

(этот ряд обрывается в силу нильпотентности $\mathfrak{g}$), и умножение задается формулой Кэмпбелла — Хаусдорфа ((SGAD), XVII, 3.9 ter). В частности, если G коммутативна, то $G \cong \mathbf{G}_{a,k}^n$.

0.7.3. Аффинная алгебраическая унипотентная группа над полем k обладает следующими свойствами (см. (SGAD), XVII, 3.9, 4.1.1, 4.1.3):

а) G имеет центральный композиционный ряд, последовательные факторы которого изоморфны $\mathbf{G}_{a,k}$, если k характеристики 0 (см. 0.7.2е)) (соотв. одной из групп $\mathbf{G}_{a,k}$, $\alpha_{p,k}$, либо k-форме группы $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^r$, если $\operatorname{char} k = p > 0$).

б) Если G — связная, то существует композиционный ряд с факторами, изоморфными $\mathbf{G}_{a,k}$, либо $\alpha_{p,k}$.

в) Если G гладкая и связная, то G обладает центральным композиционным рядом, последовательные факторы которого суть k-формы $\mathbf{G}_a$. В частности, пространство G есть форма аффинного пространства $\mathbf{A}_k^n$. Если поле k совершенно, то эти формы тривиальны. В общем случае формы $\mathbf{G}_{a,k}$ изоморфны $\mathbf{G}_{a,k}$ над подходящим радикальным расширением.

0.8. Определения. Пусть G — плоская схема групп конечного типа над S. Мы говорим, что

а) G *унипотентна*, если слои G над каждой точкой $s \in S$ являются унипотентными алгебраическими группами над $k(s)$.

б) G *линейно унипотентна*, если G аффинна и существуют такие сечения $t_1, \ldots, t_n$ кольца $\mathcal{O}_{S,\,G}$, что

$$\mu(t_i) = t_i \otimes 1 + 1 \otimes t_i + \sum_j a_{ij} \otimes b_{ij},$$

причем $a_{ij}, b_{ij} \in \mathcal{O}_S[t_1, \ldots, t_{i-1}]$.

Замечание. Второе определение гораздо ближе к определению над полем (0.2.1). Ясно, что б)$\Rightarrow$а). Мы покажем далее, что для некоторых аффинных унипотентных S-групп G над целостными аффинными базами эти определения эквивалентны. По-видимому, единственным содержательным отличием а) от б) является отсутствие в а) требования аффинности G и целостности S. Пример 6.1 показывает, что над кольцом с нильпотентами, эти определения неэквивалентны. С другой стороны, пример 6.2 показывает, что над целостными кольцами существуют унипотентные схемы групп, не являющиеся аффинными.

0.8.1. (Рейно ([12]), XV. 3). Пусть S — схема характеристики 0, G — унипотентная S-группа, $\mathcal{F} = \mathrm{Lie}\, G$ — $\mathcal{O}_S$-алгебра Ли группы G. Тогда экспоненциальное отображение $\exp : W(\mathcal{F}) \to G$ является изоморфизмом S-схем. Кроме того, если снабдить $W(\mathcal{F})$ групповым законом, описываемым формулами Кэмпбелла — Хаусдорфа, то exp является групповым изоморфизмом. В частности, если $S = \mathrm{Spec}\, A$, то G линейно унипотентна. Кроме того, G является формой $\mathbf{A}^n_S$ в топологии Зарисского (0.10.2).

Напомним (SGAD), что для любого когерентного $\mathcal{O}_S$-Модуля $\mathcal{F}$ через $W(\mathcal{F})$ обозначается S-схема групп, представляющая функтор $T \to \Gamma(T, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_T)$. Так как S характеристики 0, то схема групп G является гладкой и имеет связные слои. В частности, $\mathcal{F} = \mathrm{Lie}\, G$ является локально свободным $\mathcal{O}_S$-Модулем и $W(\mathcal{F})$ есть векторное расслоение над S, соответствующее $\mathcal{F}$ ((SGAD), II.4.11).

0.8.2. Согласно Гротендику ((SGAD), X, 8.7, стр. 121) гладкая конечного типа S-группа G унипотентна тогда и только тогда, когда ее максимальные слои унипотентны. Там же указывается, что условие гладкости возможно излишне.

0.9. Пусть S — целостная локально нетерова схема, η — ее общая точка и X_η — схема конечного типа над η. Плоскую S-схему конечного типа, продолжающую X_η, мы будем называть *моделью* X_η. В случае когда X_η — схема групп над η, ее *групповой моделью* мы будем называть плоскую S-схему групп G, продолжающую X_η.

0.9.1. Примеры. а) Каждая плоская S-схема (соотв. S-схема групп) является моделью (соотв. групповой моделью) своего общего слоя.

б) Если S — спектр кольца дискретного нормирования A, а G_η — расширение абелевого многообразия с помощью тора, то в силу результатов Нерона — Рейно всегда существует групповая модель для G_η ([13]).

в) Если A — кольцо целых локального поля K, то парахорические подгруппы полупростой группы над K являются ее гладкими групповыми моделями ([19]).

0.10. Пусть S — схема. Под топологией Гротендика схемы S мы будем понимать произвольную топологизированную полную подкатегорию T категории Sch/S, топология которой задается множеством Cov (T) конечных сюръективных семейств морфизмов $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} S'\}_{i\in I}$, $S' \in \mathrm{Ob}\,(T)$, называемых покрытиями S'. При этом конечность означает, что множество индексов I конечно, а сюръективность — что $\bigcup\limits_{i\in I} \varphi_i(U_i) = S'$.

0.10.1. В дальнейшем нам будут встречаться следующие топологии на нетеровой схеме S:

а) Топология Зарисского $T = S_{\mathrm{Zar}}$. Она образована открытыми подсхемами схемы S, а Cov (S_{Zar}) состоит из семейств $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} S'\}$, где φ_i — открытое вложение.

б) Этальная топология $T = S_{\mathrm{et}}$. Она образована этальными S-схемами, а Cov (S_{et}) состоит из семейств $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} S'\}$, в которых φ_i — этальный морфизм.

в) fppf-топология $T = S_{\mathrm{fppf}}$. Она образована плоскими отделимыми квазиконечными S-схемами конечного типа, а Cov (S_{fppf}) состоит из семейств плоских морфизмов.

При этом морфизм называется квазиконечным, если его слои конечны ((EGA)).

г) fpqc-топология $T = S_{\mathrm{fpqc}}$. Она образована плоскими квазикомпактными S-схемами. Cov (S_{fpqc}) состоит из семейств плоских морфизмов.

д) Радикальная топология $T = S_{\mathrm{rad}}$. Она образована конечными плоскими радикальными S-схемами. Cov (S_{rad}) состоит из семейств плоских морфизмов.

При этом морфизм $f : X \to Y$ схем называется радикальным, если $\forall y \in Y$ $f^{-1}(y)$ состоит из единственной точки x и соответствующее расширение полей вычетов $k(x)/k(y)$ радикально (т. е. чисто несепарабельно) ((EGA), 1.3.5.8).

0.10.2. Пусть S — схема и T — некоторая топология Гротендика на S. Будем говорить, что S-схема X является *S-формой* S-схемы Y относительно T, если существует такое покрытие

$$\{U_i \to S\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}\,(T),$$

что $\forall i \in I$

$$X \times_S U_i \cong Y \times_S U_i.$$

В частности, можно говорить о формах в топологии Зарисского, fppf-формах, этальных, радикальных формах и т. д.

§ 1. Линейная унипотентность

1.0. Цель этого пункта — ввести рабочие обозначения.

Пусть A — целостное кольцо, K — его поле частных, X — аффинная модель аффинного пространства $\mathbf{A}^n_K$ над A, $A[X] = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Пусть $\varphi: A[X] \to K[X]$ — естественное вложение, $K[X] = K[x_1, \ldots, x_n]$.

1.0.1. Если $x_1^{t_1} \ldots x_n^{t_n}$ — моном, то мы будем его иногда записывать в виде x^t, понимая под t вектор $(t_1, \ldots, t_n)$. Пусть $t \leqslant m$ обозначает покомпонентное сравнение векторов (т. е. $t_i \leqslant m_i$ для всех i). Если $m = (m_i)$, то $T(m) = \{t : t \leqslant m\}$.

Знаками $>$, $<$ мы будем обозначать лексикографическое сравнение векторов (по первой справа неравной компоненте; в частности, $(1, 0, \ldots, 0)$ — минимальный вектор с целыми неотрицательными координатами); max всегда берется относительно этого порядка.

Будем писать $t = \deg x^t$. Если $f = \Sigma a_t x^t$, то $\deg f = \max(t : a_t \neq 0)$.

1.0.2. Для $f \in A[X]$ положим $\deg f = \deg \varphi(f)$. Пусть

$$P_t = \{f \in A[X] : \deg f \leqslant t\},$$

$$P'_t = \{f \in A[X] : \deg f < t\},$$

$$\overline{P}_t = P_t / P'_t.$$

Тогда очевидна

ЛЕММА. а) *P_t, P'_t, $\overline{P}_t$ — конечно-порожденные A-модули без кручения.*

б) $\dim \overline{P}_t \otimes K = 1$.

1.0.3. Для каждого вектора t обозначим через $z_{1,t}, \ldots, z_{r(t),t}$ множество тех элементов из P_t, образы которых в $\overline{P}_t$ являются образующими $\overline{P}_t$. Так как X конечного типа, то существует такой вектор $m(X) = (m_1, \ldots, m_n)$, что $A[X] = A\{z_{ij},\ i = 1, \ldots, r(j),\ j \in T(m(X))\}$.

1.0.4. ЛЕММА. *$\varphi \otimes \varphi$ — вложение $A[X] \otimes A[X]$ в $K[X] \otimes K[X]$.*

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность A-модулей

$$0 \to A[X] \xrightarrow{\varphi} K[X].$$

Так как $A[X]$ — плоский A-модуль, то последовательность

$$0 \to A[X] \otimes A[X] \xrightarrow{\varphi \otimes 1} K[X] \otimes A[X]$$

точна. Теперь достаточно заметить, что

$$K[X] \otimes A[X] = K[X] \otimes K[X], \quad \varphi \otimes 1 = \varphi \otimes \varphi.$$

1.0.5. Для $f = \Sigma a \otimes b \in K[X] \otimes K[X]$ положим

$$\deg f = \max(\deg a + \deg b).$$

Тогда ввиду 1.0.4 очевидна

ЛЕММА. *Пусть* $f=\Sigma a_i\otimes b_i\in A[X]\otimes A[X]$. *Тогда*

$$\deg(\varphi\otimes\varphi)(f)=\max(\deg a_i+\deg b_i).$$

1.1. ТЕОРЕМА. *Пусть G — аффинная групповая модель над A унипотентной группы, причем общий слой G изоморфен $\mathbf{A}^n_K$. Тогда G линейно унипотентна.*

1.1.1. Доказательство. Примем обозначения из 1.0 при $X=G$. Занумеруем x_i так, чтобы x_i было примитивно $\mathrm{mod}(x_1, \ldots, x_{i-1})$ (см. 4.4 ниже или ([7]), IV, § 4, 4.1). Имеем $A[G]=A[z_{ij}, i\in[1, r(j)], j\in T(m(G))]$. Занумеруем z_{ij}, $j\in T(m(G))$, подряд, причем так, чтобы

$$\deg z_i<\deg z_j\Rightarrow i<j.$$

1.1.2. ЛЕММА. *Пусть $y\in A[G]$, $\deg y=t$. Тогда*

$$\mu(y)=y\otimes 1+1\otimes y+\sum a_i\otimes b_i,$$

причем a_i, $b_i\in A[G]$, $\deg a_i<t$, $\deg b_i<t$, $\deg(\Sigma a_i\otimes b_i)\leqslant t$.

Доказательство. Пусть $y=\Sigma d_i x^i$, $d_i\in K$. Тогда

$$(\mu\otimes K)(y)=y\otimes 1+1\otimes y+\sum_i d_i\sum_{\substack{j<i,h<i\\ j+h<i}} c_{ijh}\,x^j\otimes x^h$$

(в силу выбора порядка среди x_i). Из сравнения формул для $\mu(y)$ и $(\mu\otimes\otimes K)(y)$ следует, что $\Sigma a_i\otimes b_i\in P'_t\otimes P'_t\otimes K$, откуда, ввиду 1.0.4, $\Sigma a_i\otimes\otimes b_i\in P'_t\otimes P'_t$, причем, ввиду 1.0.5, $\deg(\Sigma a_i\otimes b_i)\leqslant t$.

1.1.3. Имеем: $A[G]=A[z_1, \ldots, z_N]$, причем

$$i>j\Rightarrow\deg z_i\geqslant\deg z_j.$$

Так как

$$\mu(z_i)=z_i\otimes 1+1\otimes z_i+\sum a_{ij}\otimes b_{ij},$$

$$\deg a_{ij}<\deg z_i,\quad \deg b_{ij}<\deg z_i,$$

то

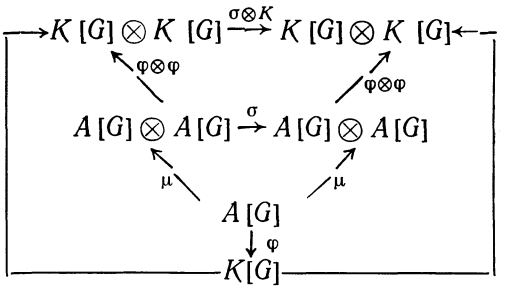
$$a_{ij}=\sum_{m<i} q_{ijm}z_m,\quad b_{ij}=\sum_{m<i} q'_{ijm}z_m,\quad q_{ijm}, q'_{ijm}\in A,$$

откуда и следует наше утверждение.

1.1.4. Замечание. Приложения к случаю кольца дискретного нормирования основаны на выборе базиса $\{z_i\}$ («приведенные полиномы») и на лемме 1.1.2.

1.2. ТЕОРЕМА. *Пусть A — целостное кольцо, G — аффинная групповая модель коммутативной группы над A. Тогда G — коммутативная схема групп.*

Доказательство. Пусть σ: $A[G]\otimes A[G]\to A[G]\otimes A[G]$ — перестановка сомножителей. Имеем:



Нам известна коммутативность внешнего треугольника и всех прямоугольников, лежащих на его сторонах. Так как φ и $\varphi\otimes\varphi$ — вложения (1.0.4), то внутренний треугольник коммутативен.

1.3.1. Замечание. Если 2 обратимо в A, то можно симметризовать формулы для $\mu(y)$. Именно, ввиду 1.3,

$$\mu(y)=\sum a_i\otimes b_i=\sum b_i\otimes a_i.$$

Поэтому

$$\mu(y)=\sum\frac{1}{2}(a_i\otimes b_i+b_i\otimes a_i).$$

1.3.2. Следствие. *Аффинные групповые модели коммутативных унипотентных групп являются коммутативными групповыми схемами.*

1.3.3. Замечание. Если базисное кольцо R имеет нильпотенты, то существует схема групп G над R, общий слой которой коммутативен, но которая некоммутативна. Например, $R=k[u]/u^2$, k — поле, $R[G]=R[x, y, z]$, x, y примитивны, $\mu(z)=z\otimes 1+1\otimes z+uy\otimes x$.

§ 2. Несколько технических теорем

2.0. Свойства аффинных унипотентных групп над кольцами дискретного нормирования оказываются довольно близкими к свойствам унипотентных групп над полями. Для доказательства соответствующих утверждений нам понадобится некоторая явная информация об образующих кольца $A[G]$, которая содержится в доказываемых далее теоремах 2.3.0, 2.4.0, 2.5.0.

2.1. Пусть A — кольцо дискретного нормирования, π — его униформизующая, $k=A/\pi$ — поле вычетов, $p=\operatorname{char} k$, K — поле частных.

Пусть X — аффинная модель $\mathbf{A}^n_K$ над A. Примем обозначения и соглашения из 1.0.

2.1.1. Так как A — кольцо главных идеалов, то, ввиду леммы 1.0.2, $\bar{P}_t$ — свободный A-модуль с одной образующей (т. е. $r(t)=1$ в обозначениях 1.0.3). Обозначим соответствующий элемент z_{1t} через z_t.

Определение. Положим $y_1=z_{(1,\,0,\,\ldots,\,0)}$, y_{i+1} — первый z_t такой, что $\deg z_t>\deg y_i$ и $z_t\notin A[y_1, \ldots, y_i]$.

2.1.2. Положим

$$\Omega_r = \{j : y_j \in K[x_1, \ldots, x_r]\}, \quad \Omega_0 = \varnothing,$$

$$\bar{\Omega}_r = \Omega_r - \Omega_{r-1}, \quad \Omega_r = [1, t_{r+1} - 1],$$

$$I = \{t_1 = 1, t_2, \ldots, t_n\}, \quad \bar{I} = [1, N] - I, \quad N = t_{n+1} - 1.$$

Если $t \in \bar{\Omega}_i$, то положим $\omega(t) = i$.

Предложение. а) *Если* $t \in I$, *то*

$$y_t = a_t x_{\omega(t)} + P(y_1, \ldots, y_{t-1}), \quad a_t \in K, \quad a_t \neq 0.$$

б) *Если* $t \in \bar{I}$, *то существует* $d_t \in \mathbf{N}$ *такой, что*

$$\pi^{d_t} y_t \in A[y_1, \ldots, y_{t-1}], \quad \pi^{d_t - 1} y_t \notin A[y_1, \ldots, y_{t-1}].$$

Доказательство. Если $t \in I$, то $y_t \in K[x_1, \ldots, x_{\omega(t)}]$, но $y_t \notin K[x_1, \ldots, x_{\omega(t)-1}]$. Поэтому $\deg y_t = (i_1, \ldots, i_{\omega(t)}, 0, \ldots, 0)$, $i_{\omega(t)} \neq 0$. Так как $\pi^a x_{\omega(t)} \in A[G]$ для достаточно большого a и так как $\deg y_i > \deg y_t$ для $i > t$, а $y_i \in K[x_1, \ldots, x_{\omega(t)-1}]$ для $i < t$, то образы $\pi^a x_{\omega(t)}$ и y_t в $P_{\deg y_t}$ совпадают, т. е. $i_{\omega(t)} = 1$, что доказывает а).

Из а) следует, что $K[x_1, \ldots, x_{\omega(t)}] = K[y_1, \ldots, y_t]$. Поэтому для $t \in \bar{I}$ имеем $\pi^a y_t \in A[y_1, \ldots, y_{t-1}]$. Выбирая a минимальным с этим свойством, получаем б).

2.2. В этом пункте вводятся понятия и доказываются утверждения, призванные разгрузить доказательство основных утверждений настоящего параграфа.

2.2.1. Пусть $p = \operatorname{char} A/\pi \neq 0$. Пусть B—A-алгебра с образующими u_i, $i \in [1, t]$. Предположим, что $[1, t] = I \cup \bar{I}$, $1 \in I$, и каждому $i \in \bar{I}$ сопоставлено число $r(i)$. Если $P(u_1, \ldots, u_t)$ — полином, то запись $P = \sum a_i u^i$ будем называть *приведенной*, если из $a_i \neq 0$ *для* $i = (i_1, \ldots, i_t)$ следует, что $i_\alpha < p^{r(\alpha+1)}$ для всех $\alpha \in [1, t-1]$, для которых $\alpha + 1 \in \bar{I}$.

Потребуем, далее, чтобы алгебра B была фактор-алгеброй алгебры многочленов $A[u_1, \ldots, u_t]$ по идеалу, порожденному соотношениями

$$\forall\, i \in \bar{I} \quad \pi^{d_i} u_i = u_{i-1}^{p^{r(i)}} + \sum_{j < m(i-1, p^{r(i)})} a_{ij} u^j, \quad a_{ij} \in A,$$

где $\sum_{j < m(i-1, p^{r(i)})} a_{ij} u^j$ — приведенная запись, $m(s, d) = (0, \ldots, 0, \underset{s}{d}, 0, \ldots, 0)$.

Обозначим $u_{i-1}^{p^{r(i)}} + \sum a_{ij} u^j$ через $P_i(u_1, \ldots, u_{i-1})$. Определим теперь Ω_i и $\bar{\Omega}_i$ следующим образом:

$$\Omega_i = [1, t_{i+1} - 1],$$

причем $|I \cap \Omega_i| = i$, $|I \cap [1, t_{i+1}] = i + 1$ (по определению $\Omega_{|I|} = [1, t]$, $\Omega_0 = \varnothing$),

$$\bar{\Omega}_i = \Omega_i - \Omega_{i-1}.$$

Если $i\in[1, t]$, то положим $\omega(i)=r$ при $i\in\bar{\Omega}_r$. Положим, далее, $m=|I|$.

2.2.2. ЛЕММА. *Пусть* $P(u_1, \ldots, u_t)\in B$. *Тогда* P *имеет приведенную запись.*

Доказательство. Пусть $P(u_1, \ldots, u_t)=\Sigma a_i u^i$ — какая-нибудь запись полинома P. Пусть $\lambda(i)=\Sigma i_\alpha$. Мы построим алгоритм $\mathscr{A}$, который преобразует данную запись полиномов в другую. Применение алгоритма $\mathscr{A}$ к одночлену u^r дает полином $\Sigma d_{rj}u^j$, причем

$$\max(\lambda(j): d_{rj}\neq 0)\leqslant\lambda(r).$$

Более того, если $\max(\lambda(j) : d_{rj}\neq 0)=\lambda(r)$, то $\mathscr{A}(u^r)=u^r$ и это происходит тогда и только тогда, когда u^r приведен. В силу этих замечаний описанный ниже алгоритм прекращает работу через конечное число шагов и результатом его работы является приведенный полином.

Опишем теперь $\mathscr{A}$. Пусть $a_r u^r\neq 0$ — член наибольшей степени $r=(r_1, \ldots, r_t)$, для которого r не удовлетворяет условию приведенности. Пусть β — наименьший номер, для которого $\beta+1\in\bar{I}$, $\beta+1<t$, $r_\beta\geqslant p^{r(\beta+1)}$. Положим

$$\mathscr{A}\left(\sum a_i u^i\right)=\sum_{i\neq r} a_i u^i+\mathscr{A}(a_r u^r),$$

$$\mathscr{A}(a_r u^r)=a_r u_1^{r_1}\ldots u_\beta^{r_\beta}\ldots u_t^{r_t}\cdot u_\beta^{r(\beta)-p^{r(\beta+1)}}\quad(\pi^{d_{\beta+1}}u_{\beta+1}-P_{\beta+1}(u_1\ldots, u_\beta)).$$

Упомянутые выше свойства $\mathscr{A}$ очевидны и лемма доказана.

2.2.3. Имеем $\bar{\Omega}_r\cap I=t_r$. Положим $v_r=u_{t_r}$, $r\in[1, m]$. Для полинома $Q(v_1, \ldots, v_m)$ обозначим через $\deg Q$ его степень относительно $\{v_i\}$ (см. 1.0.1).

ЛЕММА. а) *Подкольцо* $A[v_1, \ldots, v_m]$ *кольца* B *изоморфно кольцу многочленов от* m *переменных.*

б) *Пусть* $P(u_1, \ldots, u_t)\in B$ *и* $P=\Sigma a_i u^i$ — *приведенная запись. Пусть* $\rho=\max(i : a_i\neq 0)$, $\rho=(\rho_1, \ldots, \rho_t)$. *Существуют такие* $a\in\mathbf{N}$ *и полином* $Q(v_1, \ldots, v_m)$, *что* $\pi^a P=Q$. *При этом если* $\deg Q=(\delta_1, \ldots, \delta_m)$, *то*

$$\delta_q=\sum_{\alpha\in\bar{\Omega}_1}\left(\rho_\alpha\prod_{\substack{\beta<\alpha\\ \beta\in\Omega_q}} p^{r(\beta)}\right).$$

Доказательство. а) очевидно следует из определения (2.2.1).

Докажем б). Положим $d=\sum_{\alpha\in\bar{I}} d_\alpha$ (см. 2.2.1). Для записи $\sum b_i u^i$, $b_i\in K$, положим

$$\varkappa=\max\left(\sum i_\alpha : b_i\neq 0\right),\quad \sigma=\max(i : b_i\neq 0),$$

$$\tau=\min(q\in\bar{I} : i_\alpha=0\quad\forall\alpha\in[q+1, t]\cap\bar{I}),$$

Определим теперь алгоритм $\mathscr{B}$ (в некотором смысле обратный алгоритму $\mathscr{A}$ доказательства леммы 2.2.2), который действует на записях полиномов от $u_1, \ldots, u_t$. Именно, если $\Sigma b_i u^i$, $b_i \in \mathscr{A}$ — некоторая запись, $k=\varkappa(\Sigma b_i u^i)$, $q=\tau(\Sigma b_i u^i)$, то положим

$$\mathscr{B}: \sum b_i u^i \to \pi^d{}_k \sum b_i u_1^{i_1} \ldots u_t^{i_t} \to \sum c_i u_1^{i_1} \ldots u_{q-1}^{i_{q-1}} (\pi^d u_q)^{i_q} u_{q+1}^{i_{q+1}} \ldots u_t^{i_t} \to$$

$$\to \sum c_i u_1^{i_1} \ldots u_{q-1}^{i_{q-1}} (u_{q-1}^{p^{r(q)}} + \sum a_{qj} u^j)^{i_q} u_{q+1}^{i_{q+1}} \ldots u_t^{i_t} .$$

Из выбора k и d следует, что $c_i \in A$. Далее, очевидно, что $\tau(\mathscr{B}(\Sigma b_i u^i)) < \tau(\Sigma b_i u^i)$. Поэтому $\mathscr{B}$ заканчивает работу через $t-|I|$ шагов и результатом его работы будет многочлен от u_i, $i \in I$, т. е. от v_i. Осталось показать, что это будет многочлен указанной степени. Это следует из того, что

$$\sigma(\mathscr{B}(u^i)) = (i_1, \ldots, i_{q-r}, i_{q-1} + p^{r(q)} i_q, 0, i_{q+1}, \ldots),$$

и из следующего простого факта: если

$$i = (i_1, \ldots, i_t), \quad j = (j_1, \ldots, j_t), \quad i_{q-1} < p^{r(q)},$$
$$j_{q-1} < p^{r(q)}, \quad i > j,$$

то

$$\sigma(\mathscr{B}(u^i)) > \sigma(\mathscr{B}(u^j)).$$

Действительно надо показать, что из $(i_{q-1}, i_q) > (j_{q-1}, j_q)$, $i_{q-1} < p^{r(q)}$, $j_{q-1} < p^{r(q)}$, следует, что $i_{q-1} + p^{r(q)} i_q > j_{q-1} + p^{r(q)} j_q$. Но если $i_q = j_q$, то это очевидно. Если же $i_q > j_q$, то это следует из неравенств на i_{q-1}, j_{q-1}.

Согласно сказанному выше член максимальной степени все время остается членом максимальной степени, откуда и следует утверждение б) леммы.

2.2.4. Следствия. а) *B — плоская A-алгебра.*

б) $B \otimes K = K[v_1, \ldots, v_m]$.

в) *Приведенная запись единственна.*

г) *Непропорциональные приведенные одночлены имеют разную степень (в кольце $K[v_1, \ldots, v_m]$ относительно $v_1, \ldots, v_m$).*

Доказательство. Все эти утверждения — прямые следствия п. 2.2.3б). Докажем, например, а). Надо показать, что B не имеет A-кручения. Пусть $P \in B$, $\Sigma a_i u^i$ — его приведенная запись. Если $\pi P = 0$, то это означает, согласно 2.2.3б), что $\sigma(\Sigma a_i u^i) = 0$ (в обозначениях доказательства 2.2.3), т. е. $\Sigma a_i u^i = 0$, что и требуется.

2.2.5. Замечание. Если u^i — приведенный одночлен, то каждый одночлен u^j, $i \ll j$, также приведен.

2.2.6. ЛЕММА. *Пусть $v_i \to v_i' = a v_i + Q_i(v_1, \ldots, v_{i-1})$ — замена образующих кольца $K[v_1, \ldots, v_m]$. Если* deg *и* deg′ *— функции степени от-*

носительно первой и второй соответственно системы образующих, то для каждого полинома $P \in K[v_1, \ldots, v_m]$:

$$\deg P = \deg' P.$$

Доказательство очевидно.

2.2.7. Пусть

$$P \in (B \otimes_A K) \otimes_A (B \otimes_A K),$$

$$P = \sum d_{ij} u^i \otimes u^j, \quad d_{ij} \in K.$$

Будем говорить, что эта запись *приведенная*, если ненулевые одночлены $d_{ij}u^i$ и $d_{ji}u^j$ приведены.

ЛЕММА. *Каждый полином* $P \in B \otimes B \otimes K$ *имеет, и притом единственную, приведенную запись. Эту запись будем обозначать через* $\widetilde{\mathcal{A}}(P)$.

Доказательство. Пусть $P = \sum b_{ij} u^i \otimes u^j$ — произвольная запись. Определим алгоритм $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ по формуле $\widetilde{\mathcal{A}}(P) = \sum b_{ij} \mathcal{A}(u^i) \otimes \mathcal{A}(u^j)$, где $\mathcal{A}$ — алгоритм из доказательства леммы 2.2.2. Как и в доказательстве леммы 2.2.2, получим $\widetilde{\mathcal{A}}^d(P) = \widetilde{\mathcal{A}}^{d-1}(P)$ для достаточно большого d и тогда $\widetilde{\mathcal{A}}^d(P)$ — приведенная запись.

Если $P = \Sigma b_{ij} u^i \otimes u^j = \Sigma d_{ij} u^i \otimes u^j$ — две приведенные записи, то $0 = \Sigma (b_{ij} - d_{ij}) u^i \otimes u^j$. Поэтому достаточно показать, что $0 \in B \otimes B \otimes K$ имеет единственную приведенную запись. Пусть $0 = \Sigma d_{ij} u^i \otimes u^j$, и пусть

$$t_1 = \max \{i : d_{ij} \neq 0\}, \quad t_2 = \max \{j : d_{t_1 j} \neq 0\}.$$

Тогда при вложении $B \otimes B \otimes K$ в $K[v_1, \ldots, v_m] \otimes K[v_1, \ldots, v_m]$ старший член этого выражения будет вида

$$b_{t_1 t_2} v^{\deg u^{t_1}} \otimes v^{\deg u^{t_2}}$$

и не равен нулю, что противоречит тому, что эта запись нуля.

2.3. Цель этого пункта — доказать, что образующие y_i кольца $A[G]$, где G — аффинная групповая модель унипотентной группы с общим слоем, изоморфным $\mathbf{A}^n_K$, обладают свойствами, указанными в 2.2. Мы используем эти свойства в §§ 3, 4.

Примем обозначения пункта 2.1 при $X = G$. Положим дополнительно

$$\eta(x) = \mu(x) - x \otimes 1 - 1 \otimes x, \quad \Phi_a(x) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p^a - 1} C_{p^a} x^i \otimes x^{p^a - i}$$

и обозначим через $m(i, d)$ вектор произвольной длины, у которого i-ая компонента равна d, а все остальные — нули. Положим $h(i) = \deg y_i$.

2.3.0. Пусть G — аффинная групповая модель унипотентной группы над A, общий слой которой изоморфен $\mathbf{A}^n_K$. Пусть $K[G] = K[x_1, \ldots, x_n]$, причем будем считать ([7], IV, § 4, 4.1), что x_i примитивно по модулю $K[x_1, \ldots, x_{i-1}]$.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $p=\operatorname{char} A/\pi\neq 0$. *Можно выбрать* y_i, $i\in\bar{I}$ (см. 2.1), *так, что*

$$\pi^{d_i} y_i = y_{i-1}^{p^{r(i)}} + \tilde{P}_i(y_1, \ldots, y_{i-1}),$$

причем

а) $\deg \tilde{P}_i(y_1, \ldots, y_{i-1}) < p^{r(i)} \deg y_{i-1}$,

б) $\pi^{di} \mid p$.

2.3.0.1. Замечания. а) Теорему можно доказывать и при $\operatorname{char} A/\pi=0$. Однако в этом случае вместо утверждения б) теоремы возникает условие $\pi^{d_i} \mid p$ для некоторого простого p, откуда следует, что $\bar{I}=\varnothing$ (ср. 0.8.1).

б) Если $\operatorname{char} K=p$, то утверждение б) теоремы пусто, ибо $p=0$ в K. Это дает возможность доказать в характеристике p более точные утверждения (см. 2.4, 2.5).

2.3.0.2. Доказательство теоремы можно рассматривать как более детальное проведение доказательства теоремы о линейной унипотентности. Существенно используется возможность канонически выбирать базис в $A[G]$. Аппаратом, дающим эту каноничность, являются приведенные многочлены из 2.2.

2.3.1. Прежде чем переходить к доказательству, введем некоторые обозначения и определения.

2.3.1.1. Будем говорить, что y_i, $i\leqslant t$,— *правильно выбранные образующие*, если они удовлетворяют выводам теоремы.

Ясно, что к подалгебре B в $A[G]$, порожденной y_i, $i\leqslant t$, применимы рассмотрения пункта 2.2. В частности, определена приведенность и имеют место утверждения 2.2.2.—2.2.7.

2.3.1.2. ЛЕММА. *Пусть* $y_1, \ldots, y_t$ — *правильно выбранные образующие, и пусть* $t+1\in\bar{I}$ *и* $\pi^{d_{t+1}} y_{t+1}=\Sigma a_i y^i$, $a_i\in A$, *где* $\Sigma a_i y^i$ — *приведенная запись.*

а) *Если* $a_m y^m$, $a_m\neq 0$,— *член наибольшей степени в этой записи, то можно считать, что* $a_m=1$.

б) *Если* $a_i\in\pi^{d_{t+1}}A$, *то можно считать, что* $a_i=0$.

Доказательство. Допустим, что $a_m=\pi b$, $b\in A$. Тогда

$$z = \pi^{d_{t+1}-1} y_{t+1} - b y_m \in A[G]$$

и $\deg z<\deg y_{t+1}$. *Следовательно,*

$$\pi^{d_{t+1}} y_{t+1} = \pi b y^m + \pi z.$$

Но это противоречит, ввиду плоскости $A[G]$, условию выбора d_{t+1} (см. 2.1.3). Поэтому $a_m\in A^*$.

Положим $y'_{t+1} = a_m^{-1} y_{t+1}$. Легко видеть, что y'_{t+1} удовлетворяет аналогичным уравнениям с $a_m = 1$.

Если теперь $a_i \in \pi^{d_{t+1}} b$, $b \in A$, то положим $y'_{t+1} = y_{t+1} - by^i$. Тогда $y'_{t+1} \in A[G]$, $\pi^{d_{t+1}} y'_{t+1} = \sum a_\alpha y^\alpha - a_i y^i$, что и требуется.

2.3.1.3. ЛЕММА. *Пусть* $y_1, \ldots, y_t$ — *правильно выбранная система образующих. Пусть* $t+1 \in I$ *и*

$$y_{t+1} = \chi_{t+1} x_{\omega(t+1)} + \sum a_i y^i, \qquad a_i, \chi_{t+1} \in K,$$

— *приведенная запись. Если* $a_i \in A$, *то можно считать, что* $a_i = 0$.

Доказательство. Пусть $a_i \in A$. Положим $y'_{t+1} = y_{t+1} - a_i y^i$, тогда получим наше утверждение.

2.3.2. Пусть $M = A[G] \otimes A[G]$ и $r = (r_1, \ldots, r_n)$. Обозначим через $\tilde{M}_r$ подпространство в $M \otimes K$, порожденное элементами $a \otimes b$, для которых $\deg a + \deg b < r$. Функцию $\deg a \otimes b = \deg a + \deg b$ будем называть глобальной степенью.

2.3.2.1. Напомним, что, согласно 1.1.2, для всех $y \in A[G]$

$$\eta(y) = \sum a_j \otimes b_j, \quad a_j, b_j \in A[G],$$

$$\deg a_j < \deg y, \quad \deg b_j < \deg y, \quad \deg a_j \otimes b_j \leqslant \deg y.$$

Нам потребуется некоторое уточнение этого утверждения.

2.3.2.2. Пусть $y = \Sigma a_i y^i$, $a_i \in K$ — приведенная запись. Пусть $\Lambda = \{j : a_j \neq 0\}$. Занумеруем элементы из Λ в порядке возрастания и запишем

$$\sum a_i y^i = \sum b_\alpha y^{\lambda_\alpha}, \qquad b_\alpha \in K, \quad \lambda_\alpha \in \Lambda.$$

Пусть $z = \sum_{\alpha \geqslant q} b_\alpha y^{\lambda_\alpha}$, $\eta(z) = \sum b_{ij} y^i \otimes y_i$ — приведенная запись.

ЛЕММА. *Пусть* $r = \deg y^{\lambda_{q-1}}$. *Допустим, что* $b_{ij} \in A$, *если* $\deg y^i \otimes y^j > r$. *Для того чтобы* $\eta(y) \in M$, *необходимо, чтобы*

$$\eta(b_{q-1} y^{\lambda_{q-1}}) + \sum_{\deg y^i \otimes y^j = r} b_{ij} y^i \otimes y^j \in M + \tilde{M}_r.$$

Доказательство. Приведенные одночлены образуют базис $A[G]$. Приведенная запись для $\eta(y)$ есть как раз выражение $\eta(y)$ через базисные элементы, которое использовалось в 1.1 для доказательства линейной унипотентности. Члены $b_\alpha y^{\lambda_\alpha}$, $\alpha < q-1$, имеют меньшую степень, чем $b_{q-1} y^{\lambda_{q-1}}$ (см. 2.2.3, 2.2.6). Поэтому $\eta\left(\sum_{\alpha < q-1} b_\alpha y^{\lambda_\alpha}\right) \in \tilde{M}_r$. Отсюда и следует наше утверждение.

2.3.2.3. Предыдущее утверждение используется в следующей форме.

Следствие. *Примем условия* 2.3.2.2. *Если* $\deg y^i \otimes y^j = m(t_{ij}, p^{a_{ij}})$ *при* $b_{ij} y^i \otimes y^j \notin M + \tilde{M}_r$, *то либо* $\lambda_{q-1} = m(t, p^a)$, *либо* $\eta(b_{q-1} y^{\lambda_{q-1}}) \in M + \tilde{M}_r$.

Доказательство. Допустим, что $\eta(b_{q-1}y^{\lambda q-1})\in M+\widetilde{M}_r$. Тогда 2.3.2.2 дает: $r=m(t, p^a)$. Утверждение следует теперь из 2.2.3, 2.2.6.

2.3.3. Напомним некоторые свойства биномиальных коэффициентов и выражений $\Phi_a(x)$.

2.3.3.1. Пусть $d=p^a\cdot b$. Тогда

$$p^{a-\alpha}\,|\,C_d^\beta, \text{ если } p^{\alpha+1}\nmid\beta.$$

2.3.3.2. $C_{p^ad}^{p^a\alpha}\equiv C_d^\alpha \bmod p$.

2.3.3.3. $\underset{\alpha\in[1,\,d-1]}{\text{НОД}}\, C_d^\alpha=1$, если $d\neq p^a$, p — простое, и $=p$, если $d=p^a$, p — простое.

2.3.3.4. $\Phi_a(x)\in\mathbf{Z}[x]\otimes\mathbf{Z}[x]$,

$$\Phi_a(x^{p^b})\equiv\Phi_{a+b}(x)\bmod p\,\mathbf{Z}[x]\otimes\mathbf{Z}[x].$$

2.3.4. Пусть теперь $y_1, \ldots, y_t$ — правильно выбранные образующие.

2.3.4.1. Если $i\in I$, то

$$\eta(y_i)\equiv 0\bmod\widetilde{M}_{h(i)},$$

$$\eta(y_i^{p^ab})\equiv\sum_{\alpha=1}^{b-1}C_b^\alpha y_i^{p^a\alpha}\otimes y_i^{p^a(d-\alpha)}\bmod pM+\widetilde{M}_{h(i)}$$

при $a\geqslant 1$, $\eta(y_i^{p^a})\equiv p\,\Phi_1(y_i^{p^{a-1}})\bmod p^2M+\widetilde{M}_{h(i)}$.

2.3.4.2. ЛЕММА. *Пусть* $i\in\bar{I}$, $m=p^ab$, $b>1$, $p\nmid b$, $\gamma=m(i, p^a)$, $\delta=m(i, m-p^a)$,

$$\eta(y_i^m)=\sum b_{mi\alpha\beta}y^\alpha\otimes y^\beta,$$

где $y^\alpha\otimes y^\beta$ *— приведенные мономы при* $b_{mi\alpha\beta}\neq 0$. *Тогда*

$$b_{mi\gamma\delta}\equiv C_{p^a}^m\bmod\pi.$$

Доказательство. Пусть

$$\eta(y_i)=\sum b_{i\alpha\beta}y^\alpha\otimes y^\beta \bmod\widetilde{M}_{h(i)},$$

где $\deg b_{i\alpha\beta}y^\alpha\otimes y^\beta=h(i)$, $\deg b_{i\alpha\beta}y^\alpha<h(i)$, $\deg b_{i\alpha\beta}y^\beta<h(i)$ при $b_{i\alpha\beta}\neq 0$. Тогда

$$\eta(y_i^m)\equiv(y_i\otimes 1+1\otimes y_i+\sum b_{i\alpha\beta}y^\alpha\otimes y^\beta)^m-$$

$$-y_i^m\otimes 1-1\otimes y_i^m\equiv\sum_{\alpha=1}^{m-1}C_m^\alpha y_i^{m-\alpha}\otimes y_i^\alpha+\sum d_{\alpha\beta}y^\alpha\otimes y^\beta \bmod\widetilde{M}_{mh(i)}.$$

Заметим, что при $\deg d_{\alpha\beta}y^\alpha\otimes y^\beta=mh(i)$ и $\alpha, \beta\neq m(i, d)$ либо y^α, либо y^β содержат y_j, $j<i$. Если после приведения такой моном даст член вида

$y_i^\alpha \otimes y_i^\beta$, $\alpha+\beta=m$, то это будет член старшей степени и потому коэффициент при нем будет кратен π, откуда и следует наше утверждение.

2.3.4.3. ЛЕММА. *Пусть* $i\in\bar{I}$, $m=p^{a+1}$, $a\geqslant 0$. *Пусть* γ, δ, $b_{mi\gamma\delta}$ *такие же, как и в* 2.3.4.2. *Тогда*

$$b_{mi\gamma\delta}\equiv C_m^{p^a} \bmod \pi p.$$

Доказательство. Для $\eta\,(y_i^m)$ пишем те же выражения, что и в доказательстве 2.3.4.2. Тем же способом, что и в доказательстве 2.3.4.2, устанавливаем, что члены $d_{\alpha\beta}y^\alpha\otimes y^\beta$, которые после приведения дают слагаемое $y^\gamma\otimes y^\delta$ с коэффициентом, не лежащим в πp, содержатся в сумме

$$C_p^1 y_i^{p^a}\otimes y_i^{p^a(p-1)}+\sum (b_{i\alpha\beta}y^\alpha\otimes y^\beta)^m$$

(ибо остальные члены содержат коэффициент p и после приведения дают еще и π).

Допустим, что $b_{i\alpha\beta}^m y^{m\alpha}\otimes y^{m\beta}$ после приведения дает $dy_i^{p^a}\otimes y_i^{p^a(p-1)}$. Тогда для подходящего b мы должны иметь:

$$\deg y^{m\alpha}=\deg y^{ip^a}=m\,(\omega\,(i),\ p^b).$$

Следовательно,

$$\deg y^\alpha = m\,(\omega\,(i),\ p^{b-a-1})$$

и в силу 2.2.3 $y^\alpha = y_j^{p^r}$, $p\cdot\deg y^\alpha=\deg y_i$. Но тогда, ввиду приведенности записи для $\eta\,(y_i)$, из доказательства 2.3.4.2 получаем:

$$y^{p\alpha}=d'y_i+Q(\ldots),\quad \deg Q<\deg y_i.$$

Отсюда вытекает, что

$$y^\alpha = y_{i-1}^{p^{r(i)-1}},$$

и, значит,

$$y^\beta = y_{i-1}^{p^{r(i)-1}(p-1)}.$$

Предположим, что коэффициент при таком члене лежит в $\pi^{-d_i}pA$. Тогда

$$(b_{i\alpha\beta}y^\alpha\otimes y^\beta)^p\in(\pi^{-d_i}p)^p\,(\pi^{d_i})^p\,M+\tilde{M}_{ph(i)},$$

откуда и следует наше утверждение.

Доказательство того, что $b_{i\alpha\beta}\in\pi^{-d_i}pA$, проводится по индукции. Пусть $\omega(i)=r$, $i=t_r+j$. Если $j=0$, то наше утверждение содержится в 2.3.4.1. Допустим, что оно верно для $j-1$ и докажем его для j. Имеем:

$$\eta\,(y_{i-1})=\pi^{-d_{i-1}}p\,\tilde{d}\Phi_1\,(y_{i-2}^{p^{r(i-1)-1}})+\ldots,\quad \tilde{d}\in A,$$

$$\eta(y_i) = \pi^{-d_i}(y_i \otimes 1 + 1 \otimes y_i + \pi^{-d_{i-1}p}\tilde{d}\Phi_1(y_{i-2}^{p^{r(i-1)-1}}) + \ldots)^{p^{r(i)}} - \\ - \pi^{-d_i}y_i^{p^{r(i)}} - \pi^{-d_i}1 \otimes y_i^{p^{r(i)}}.$$

Члены вида $y_i^{\alpha} \otimes y_i^{\beta}$ степени $\deg y_i$ получаются разными способами, но в силу предположений индукции и ввиду того, что при приведении появляются множители π в достаточно большом количестве, мы и получаем наше утверждение.

2.3.5. Перейдем к доказательству теоремы. Применим индукцию по i. Допустим, что мы показали, что $y_1, \ldots, y_t$ выбраны правильно. Покажем, что можно выбрать правильно y_{t+1}. Если $t+1 \in I$, то доказывать нечего (см. 2.3.1.3). Поэтому пусть $t+1 \in \bar{I}$.

2.3.5.1. Пусть $\pi^{d_{t+1}}y_{t+1} = \sum a_i y_i$ — приведенная запись, $a_i \in A$. Пусть $m = \max(i\colon a_i \neq 0)$. Ввиду 2.3.1.2, $a_m = 1$. В силу 2.3.2.2,

$$\pi^{-d_{t+1}}\eta(y^m) \in M + M_{\deg y_{t+1}}.$$

Покажем, что отсюда следует, что $m = m(t, p^a)$ и $\pi^{d_{t+1}} \mid p$.

2.3.5.2. Отметим, что если $m = (m_1, \ldots, m_t, 0, \ldots, 0)$, то $m_t \neq 0$.

Действительно, если $m_t = 0$, то, ввиду приведенности (см. 2.2), будем иметь $\deg y_{t+1} < \deg y_t$, что противоречит правилам выбора y_{t+1}.

2.3.5.3. Допустим, что $m_i \neq 0$ для $i < t$. Тогда $\eta(y_{t+1})$ содержит член

$$\pi^{-d_{t+1}}y_t^{m_t} \otimes y^{m-m(t,m_t)},$$

который, ввиду 2.3.4, является в $\eta(y_{t+1})$ единственным приведенным членом такого вида, не лежащим в pM. Отсюда следует, что такой случай невозможен, т. е. $m_i = 0 \ \forall i \neq t$.

2.3.5.4. Пусть теперь $m_t = 0$, $i \neq t$, $m_t = d$, $d = p^a b$, $p \nmid b$, $b \neq 1$. Ввиду 2.3.4.2 отсюда следует, что $\pi^{d_{t+1}} \mid C_b^{\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots, b-1$. Однако это невозможно при $d_{t+1} \geqslant 1$.

2.3.5.5. Таким образом, $m_t = p^a$, $m_i = 0 \ \forall i \neq t$. Ввиду 2.3.4.3 мы должны тогда иметь: $\pi^{d_{t+1}} \mid C_p^{\alpha} \ \forall \alpha \in [1, p-1]$. Отсюда следует, что $\pi^{d_{t+1}} \mid p$, что вместе с доказательством 3.1, которое позволяет снова воспользоваться 2.2, заканчивает шаг индукции.

2.4 Пусть теперь $\operatorname{char} K = p$. Пусть $K[G] = K[x_1, \ldots, x_n]$. Допустим, что $[1, n] = \bigcup\limits_{\alpha=1} J_\alpha$, $J_\alpha \cap J_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$ и при $\alpha > \beta$ $\forall i \in J_\alpha$, $\forall j \in J_\beta$ имеем $i > j$. Допустим, далее, что для $i \in J_\alpha$

$$\eta(x_i) \equiv 0 \bmod K[x_j, j \in \bigcup_{\beta<\alpha} J_\beta] \otimes K[x_j, j \in \bigcup_{\alpha<\beta} J_\beta].$$

Такое разбиение соответствует нормальному ряду, факторы которого изоморфны $\mathbf{G}_{a,K}^{|J_\alpha|}$.

Положим

$$\widetilde{\Omega}_\alpha = \bigcup_{i\in J_\alpha} \overline{\Omega}_i, \quad \Omega'_\alpha = \Omega_i - \widetilde{\Omega}_\alpha, \quad i \in J_\alpha.$$

Если $i\in\widetilde{\Omega}_\alpha$, то положим $\widetilde{\omega}(i)=\alpha$.

2.4.0. ТЕОРЕМА. *Пусть* $\operatorname{char} K=p>0$. *Можно выбрать* y_i, $i\in[1, N]$ (см. 2.1), *так, что*
при $i\in\bar{I}$

$$\pi^{d_i} y_i = \sum_{\substack{j\in\widetilde{\Omega}_{\omega(i)}\\ j<i}} \sum_\alpha a_{ij\alpha} y_j^{p^\alpha} + \widetilde{P}_i\,(y_j,\ j\in\Omega'_{\widetilde{\omega}(i)}), \quad a_{ij\alpha}\in A,$$

при $i\in I$

$$y_i = \chi_i x_{\omega(i)} + \sum_{\substack{j\in\widetilde{\Omega}_{\omega(i)}\\ j<i}} \sum_\alpha a_{ij\alpha} y_j^{p^\alpha} + \widetilde{P}_i\,(y_j,\ j\in\Omega'_{\widetilde{\omega}(i)}), \quad \chi_i,\ a_{ij\alpha}\in K.$$

При этом, полагая для $i\in\bar{I}$ $r(i)=\max\,(\alpha : a_{i\,i-1\,\alpha}\neq 0)$, *имеем:*

а) $a_{ii-1r(i)}=1, \quad i\in\bar{I}$,

б) $a_{ij\alpha}=0$, *если* $j+1\in\bar{I}, \quad \alpha\geqslant r\,(j+1)$.

2.4.0.1. Замечание. Утверждение а) содержится в 2.3.0. Утверждение б) означает просто, что мы рассматриваем приведенную запись.

2.4.0.2. Доказательство теоремы 2.4.0 является, в сущности, доказательством теоремы 2.3.0, использующим свойство $p=0$.

2.4.1. Мы будем теперь говорить, что $y_1, \ldots, y_t$ *выбраны правильно*, если они удовлетворяют выводам теоремы 2.4.0. Ясно, что все свойства правильных образующих, рассмотренные в 2.3, сохраняются и в нашем случае.

2.4.2. Пусть теперь $y_1, \ldots, y_t$ — правильно выбранные образующие. Мы считаем всюду ниже, что $d_i=0$ для $i\in I$. Положим

$$R_i = M + K\,[y_j,\ j\in\Omega'_{\omega(i)}]\otimes K\,[y_j,\ j\in\Omega'_{\omega(i)}].$$

2.4.2.1. Для всех $i\in[1, t]$

$$\eta\,(y_i)\equiv 0 \mod R_i,$$

$$\eta\,(y_i^{p^{ab}})\equiv \sum_{\alpha=1}^{b-1} C_b^\alpha y_i^{p^{a\alpha}}\otimes y_i^{p^{a(b-\alpha)}} \mod R_i.$$

В частности,

$$\eta\,(y_i^{p^a})\equiv 0 \mod R_i.$$

2.4.3. Доказательство теоремы. Индукция по i. Допустим, что мы показали, что $y_1, \ldots, y_t$ выбраны правильно. Покажем, что можно выбрать правильно y_{t+1}.

2.4.4.1. Пусть

$$y_{t+1} = \chi_{t+1} x_{\omega(t+1)} + \sum a_i y^i,$$

где $\chi_{t+1}=0$, если $i\in\bar{I}$, $\Sigma a_i y^i$ — приведенная запись, $a_i\in K$ и при $i\in I$ $\deg \Sigma a_i y^i < \deg x_{\omega(t+1)}$. К $y=\Sigma a_i y^i$ применим обозначения из 2.3.3.2. В частности, $\Lambda=\{i : a_i\neq 0\}$; занумеровав элементы из Λ в порядке возрастания, имеем:

$$y = \sum_{\alpha=0}^{|\Lambda|-1} b_\alpha y^{\lambda_\alpha}.$$

Если $\lambda_\alpha = m(i, d)$, то положим $\rho(\alpha) = i$.

2.4.4.2. Внутренняя индукция сверху по элементам из Λ. Допустим, что для $\alpha \geqslant q$ мы показали, что $\lambda_\alpha = m(\rho(\alpha), p^{\nu_\alpha})$. Положим

$$z = \sum_{\alpha\geqslant q} b_\alpha y^{p^{\nu_\alpha}}_{\rho(\alpha)}.$$

Имеем (ввиду 2.4.3.1):

$$\eta(z) \equiv 0 \mod R_{t+1}.$$

2.4.4.3. Положим $\lambda_{p-1} = m = (m_1, \ldots, m_N)$, $y^m \notin K[y_i, i\in\Omega'_{\omega(t+1)-1}]$. Мы покажем, что если $m\neq m(i, p^d)$, то $b_{q-1}\in A$, и потом применим 2.4.1.1. или 2.3.1.2. Ввиду 2.4.2.1 и свойства $\eta(z)\equiv 0 \mod R_{t+1}$,

$$\eta(b_{q-1} y^m) \equiv \mod (R_{t+1} + M + \tilde{M}_{\deg y^m}).$$

Однако ввиду 2.3.2.3 при $m\neq m(i, p^d)$ отсюда следует, что $b_{q-1}\in A$, что и требуется (при $m=(i, p^d)$ получается условие $0\cdot b_{q-1}\in A$, которое не является условием). Теорема доказана.

2.5. Следствие. *В условиях теоремы* 2.4.0 *если общий слой* G *есть* $\mathbf{G}^n_{a,K}$, *то* y_i, $i\in[1, N]$, *можно выбрать такими, как в теореме* 2.4.0, *причем* $\tilde{P}_i = 0$ $\forall i\in[1, N]$ (*ибо в этом случае* $J_1 = [1, N]$).

2.6. Следствие. *В условиях следствия* 2.5 *существует точная последовательность групп над* A:

$$1 \to G \to \mathbf{G}^N_{a,A} \to \mathbf{G}^{N-n}_{a,A} \to 1.$$

Доказательство. Положим $F_i = \pi^{d_i} Y_i - P_i(Y_1, \ldots, Y_{i-1})$, $i\in\bar{I}$. Так как P_i — p-полиномы, то отображение $\psi: A[X_i, i\in\bar{I}] \to A[Y_1, \ldots, Y_N]$, задаваемое формулой $\psi(X_i) = F_i(Y_1, \ldots, Y_N)$, определяет гомоморфизм $\mathbf{G}^N_{a,A} \to \mathbf{G}^{|\bar{I}|}_{a,A}$ (если считать X_i и Y_i примитивными), ядром которого является координатное кольцо группы G. Он очевидно эпиморфен.

2.7. Замечание. По-видимому, доказательство теоремы 2.4.0 можно распространить на случай, когда J_α выбраны так, что

$$\eta(x_i) \equiv \sum_{j<i} \sum_m a_{ijm} \Phi_m(x_j) \mod K[x_j, j\in \bigcup_{\beta<\alpha} J_\beta] \otimes K[x_j, j\in \bigcup_{\beta<\alpha} J_\beta]$$

(это соответствует ряду, факторы которого коммутативны). Для этого нужно было бы изменить упорядочение векторов $\deg y^t$, доказать аналог 1.1.2 для нового упорядочения и приспособить 2.2 к новой ситуации.

Обсуждаемое обобщение 2.4 позволило бы доказать теорему 3.5 для любых коммутативных групп в форме: гладкие со связными слоями модели унипотентных групп над кольцом дискретного нормирования с полем частных характеристики p являются формами $\mathbf{A}_S^n$ в радикальной топологии.

§ 3. Геометрия унипотентных групп

3.0.0. В этом параграфе A обозначает кольцо дискретного нормирования, K — его поле частных, π — униформизующую A, $k=A/\pi$ — поле вычетов, p — характеристику поля k.

3.0.1. В этом параграфе мы докажем, что аффинные унипотентные группы над A, являющиеся моделями $\mathbf{A}_K^n$, есть полные пересечения в $\mathbf{A}_A^N$. Если, кроме того, уравнения, задающие такую группу G, записываются в виде p-полиномов (см. 3.3.0) (мы говорим тогда, что G — p-полиномиальная группа), а слои G гладки и связны, то после некоторого квазирадикального расширения $A' \supset A$ (см.3.3.2) $G_{A'} = G_A \otimes_A A' \cong \mathbf{A}_{A'}^n$.

В частности, если $A \supset \mathbf{F}_p$, то каждая гладкая коммутативная группа G с $G_K \cong G_a^n$ со связными слоями является p-полиномиальной и тем самым к ней применимо утверждение, приведенное выше.

3.0.2. Вопрос о том, является ли каждая аффинная унипотентная групповая модель $\mathbf{A}_K^n$ p-полиномиальной, остается открытым.

3.0.3. Заметим, что предположение аффинности унипотентной A-схемы групп не очень ограничительно. Согласно аннонсированному результату Рейно (ср. ([12]), IX, 2.2), каждая плоская отделимая A-схема групп конечного типа с аффинным общим слоем является аффинной. Условие отделимости выполняется для любой плоской схемы групп конечного типа со связными слоями (SGAD), $\mathrm{VI_B}$. 5.5).

Отметим, что, не используя вышеупомянутый результат Рейно, для унипотентных квази-афинных A-схем групп можно получить аффинность, если воспользоваться ([12]), VII, 3.1.3.2. В частности, это верно, если G — гладкая со связными слоями (так как в этом случае G квазиаффинна [см. ([12]), VII, 2.1].

3.1. ТЕОРЕМА. *Пусть G — аффинная унипотентная группа, являющаяся моделью $\mathbf{A}_K^n$ над A. Пусть $y_1, \ldots, y_N$ — образующие алгебры $A[G]$, построенные согласно* 2.1,

$$\pi^{d_i} y_i = P_i(y_1, \ldots, y_{i-1}), \quad i \in \bar{I},$$

где P_i — полином вида, указанного в теореме 2.3.0. *Тогда указанные соотношения суть единственные соотношения $A[G]$.*

Доказательство. Мы показали в 2.2.4, что алгебра B, построенная по образующим и соотношениям, указанным в теореме, является

плоской. Пусть $\psi : B \to A[G]$ — проекция B на $A[G]$. Имеем коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\psi} & A[G] \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ K[u_i, i \in I] & \to & K[y_i, i \in I] = K[x_1, \ldots, x_n] \end{array}$$

Так как нижняя стрелка — изоморфизм, а вертикальные стрелки — вложения, то ψ — изоморфизм, что доказывает утверждение теоремы.

3.2. Следствие. *Пусть G — аффинная унипотентная группа над A являющаяся моделью $\mathbf{A}^n_K$. Тогда G — полное пересечение в $\mathbf{A}^N_A$.*

Доказательство. Примем обозначения теоремы 3.1. Пусть $\bar{I} = \{i_1, \ldots, i_r\}$, где $r = N - n$ (2.1.2) и $i_1 < \ldots, < i_r$. Положим

$$F_m = \pi^{d_{i_m}} Y_{i_m} - P_{i_m}(Y_1, \ldots, Y_{i_m - 1}).$$

В силу теоремы 3.1 схема G задается в $\mathbf{A}^N_A = \operatorname{Spec} A[Y_1, \ldots, Y_N]$ идеалом $I = (F_1, \ldots, F_r)$. Нам надо показать, что последовательность $F_1, \ldots, F_r$ является регулярной, т. е. полагая $B_m = A[Y_1, \ldots, Y_N]/(F_1, \ldots, F_{m-1})$, надо показать, что F_m не является делителем нуля в B_m. Согласно 3.1.1. алгебра B_i плоская. Поэтому B_m вкладывается в $B_m \otimes K$. Имеем:

$$B_m \otimes K = K[Y_j, j \in (I \cap [1, i_m - 1]) \cap [i_m, N]].$$

Пусть J — идеал в $B_m \otimes K$, порожденный Y_j, $j \in I \cap [1, i_m - 1]$. Если F_m — делитель нуля в B_m, то F_m — делитель нуля в $B_m \otimes K$ и, следовательно, F_m — делитель нуля в $B_m \otimes K/J$. Однако $B_m \otimes K/J = K[Y_j, j \in [i_m, N]]$ и образ F_m в $B_m \otimes K/J$ есть $\pi^{d_{i_m}} Y_{i_m}$. Так как Y_{i_m} — не делитель нуля в $K[Y_j, j \in [i_m, N]]$, то наше утверждение доказано.

3.3. Будем говорить, что аффинная схема G над A является *p-полиномиальной*, если $A[G] = A[y_1, \ldots, y_N]$, $[1, N] = I \cup \bar{I}$, $I \cap \bar{I} = \varnothing$ и G задается в $\mathbf{A}^N_A$ уравнениями:

$$\pi^{d_i} y_i = \sum_{j<i} \sum_{\alpha} a_{ij\alpha} y_j^{p^\alpha}, \quad a_{ij\alpha} \in A, \quad \pi^{d_i} \mid p,$$

$$a_{i\,i-1\,r(i)} = 1, \quad r(i) = \max(\alpha : a_{i\,i-1\,\alpha} \neq 0) \quad \text{для } i \in I.$$

Очевидно, что p-полиномиальная A-схема G является моделью $\mathbf{A}^n_K$.

Целью этого пункта является доказательство следующего результата.

ТЕОРЕМА. *Пусть G — гладкая p-полиномиальная схема над A со связными слоями размерности n. Существует неразветвленное расширение $A' \supset A$ такое, что соответствующее расширение полей вычетов радикально и $G_{A'} = G_A \otimes_A A' \cong \mathbf{A}^n_{A'}$.*

3.3.0. Определение. Многочлен

$$P(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i,j} a_{ij} X_i^{p^j} \in A[X_1, \ldots, X_n]$$

мы будем называть *p-полиномом.*

Отображение $f: A[X_1, \ldots, X_n] \to A[T_1, \ldots, T_n]$ называется *p-полиномиальным гомоморфизмом*, если $\forall_i \in [1, n]$ $f(X_i) = R_i(T_1, \ldots, T_n)$ — *p*-полином.

Если f, кроме того, является изоморфизмом и f^{-1} — *p*-полиномиальный гомоморфизм, то f называется *p-полиномиальным изоморфизмом.*

3.3.1. ЛЕММА. *Если* $f: A[X_1, \ldots, X_n] \to A[T_1, \ldots, T_n]$ — *p-полиномиальный гомоморфизм, то для любого p-полинома* $P(X_1, \ldots, X_n)$

$$f(P) - P' \in pA[T_1, \ldots, T_n],$$

где $P' = P'(T_1, \ldots, T_n)$ — *p-полином.*

3.3.2. Определение. Кольцо дискретного нормирования A' с униформизующей π' и полем вычетов $k' = A'/\pi'$, содержащее A, называется *квази-радикальным расширением* A, если $\pi A' = \pi' A'$, а k'/k является радикальным расширением полей.

Заметим, что если $A \supset \mathbf{F}_p$, то морфизм $\operatorname{Spec} A' \to \operatorname{Spec} A$ радикален в смысле 0.10.1 д).

3.3.3. ЛЕММА. *Для любого обратимого элемента* $a \in A$ *и любого* $n > 0$ *существует квази-радикальное расширение* $A' \supset A$, *содержащее элемент* $a' \in A'$ *такой, что*

$$a'^{p^n} - a \in \pi A'.$$

Доказательство. Пусть $\bar{a}$ — образ a при естественном гомоморфизме $A \to k$. Выберем радикальное расширение $k' = k(\sqrt[p^n]{\bar{a}})$ и какое-либо конечное квази-радикальное расширение $A' \supset A$ с полем вычетов k' (последнее можно сделать в силу (EGA), 0_{III}, 10.3.2). Пусть $a' \in A$ отображается в $\sqrt[p^n]{\bar{a}}$ при естественном гомоморфизме $\varphi: A' \to A'/\pi = k'$. Очевидно,

$$\varphi(a'^{p^n}) - \varphi(a) = \varphi(a'^{p^n} - a) = 0$$

и тем самым $a'^{p^n} - a \in \pi A'$, что и требовалось.

3.3.4. ЛЕММА. *Пусть* $P \in A[X_1, \ldots, X_n]$ — *неприводимый по* $\bmod \pi$ *p-полином с обратимыми ненулевыми коэффициентами. Существуют квазирадикальное расширение* $A' \supset A$ *и p-полиномиальный изоморфизм* $f: A'[X_1, \ldots, X_n] \to A'[T_1, \ldots, T_n]$ *такие, что*

$$f(P) - T_1 \in pA'(T_1, \ldots, T_n).$$

Доказательство. Пусть $P = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{m_j} a_{ji} X_j^{p^i}$. Применим индукцию по

максимуму m_j с $a_{jm_j} \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $m_1 = \max(m_j : a_{jm_j} \neq 0)$. Предположим, что $m_1 = 0$. Тогда, полагая

$$R_i(T_1, \ldots, T_n) = T_i, \quad i = 2, \ldots, n,$$

$$R_1(T_1, \ldots, T_n) = a_{10}^{-1}\left(T_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{j0}T_j\right),$$

получим $P(R_1, \ldots, R_n) = T_1$. Очевидно, гомоморфизм $X_i \to R_i(T_1, \ldots, T_n)$ определяет p-полиномиальный изоморфизм $A[X_1, \ldots, X_n] \to A[T_1, \ldots, T_n]$. Пусть теперь $m_1 > 0$. Если все $a_{jm_j} = 0$ для $j > 2$, то многочлен $P(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=0}^{m_1} a_{1i}X_1^{p^i}$ не является неприводимым по mod π. Тем самым можно считать, что, скажем, $a_{2m_2} \neq 0$. По предположению $m_1 \geqslant m_2$.

В силу 3.3.3 существует квазирадикальное расширение $A' \supset A$, содержащее элементы

$$b_i = (a_{1i}/a_{2m_2})^{p^{-m_2}}, \quad i = m_2, \ldots, m_1.$$

Положим

$$R_1 = T_1,$$

$$R_i = T_i, \quad i \geqslant 3,$$

$$R_2 = T_2 - b_{m_2}T_1 - \ldots - b_{m_1}T_1^{p^{m_1-m_2}}.$$

Очевидно, что гомоморфизм $f : X_i \to R_i(T_1, \ldots, T_n)$ определяет p-полиномиальный изоморфизм $A'[X_1, \ldots, X_n] \to A'[T_1, \ldots, T_n]$. Имеем:

$$a_{2m_2}X_2^{p^{m_2}} + a_{1m_2}X_1^{p^{m_2}} + \ldots + a_{1m_1}X_1^{p^{m_1}} =$$

$$= a_{2m_2}(X_2 + b_{m_2}X_1 + \ldots + b_{m_1}X_1^{p^{m_1-m_2}})^{p^{m_2}} + pF(X_1, X_2)$$

и тем самым

$$P' = P(R_1, \ldots, R_n) = \sum_{i=0}^{m_1-1} a'_{1i}T_1^{p^i} + \sum_{i=0}^{m_2} a_{2i}T_2^{p^i} +$$

$$+ \sum_{j=3}^{n}\sum_{i=0}^{m_j} a_{ji}T_j^{p^i} + pF'(T_1, T_2).$$

Так как f — изоморфизм, то многочлен $P'(T_1, \ldots, T_n)$ неприводим. Если $m_1 > m_2$, то мы понижаем $\max(m_1, \ldots, m_n)$ и можем воспользоваться предположением индукции. Если же $m_1 = m_2$, то надо применить предыдущее рассуждение, поменяв местами T_1 и T_2, и снова понизить m_2. Доказательство окончено.

3.3.5. ЛЕММА. *Пусть* $F=\pi^d X_{n+1}-P(X_1,\ldots, X_n)\in A[X_1,\ldots, X_{n+1}]$, *и пусть* P *имеет вид* $P=P_0+\pi P_1+\ldots+\pi^d P_d$, *где* $P_i\in A[X_1, \ldots, X_n]$, $i=0, \ldots, d$. *Положим*

$$F_i' = \pi Y_i - P_{i-1} - Y_{i-1} \in A[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_d],$$

$$i = 1, \ldots, d, \quad Y_0 = 0.$$

Существует изоморфизм

$$f\colon A[X_1, \ldots, X_{n+1}]/(F) \to A[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_d]/(F_1', \ldots, F_d').$$

Доказательство. Определим гомоморфизм $\tilde{f}: A[X_1, \ldots, X_{n+1}]\to$ $\to A[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_d]$, полагая

$$\tilde{f}(X_i) = X_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\tilde{f}(X_{n+1}) = Y_d + P_d(X_1, \ldots, X_n).$$

Имеем:

$$\tilde{f}(F(X_1, \ldots, X_{n+1})) = \tilde{f}\left(\pi^d X_{n+1} - \sum_{i=0}^{d} \pi^i P_i(X_1, \ldots, X_n)\right) =$$

$$= \pi^d Y_d + \pi^d P_d - \sum_{i=0}^{d} \pi^i P_i = \pi^d Y_d + \pi^d P_d +$$

$$+ \sum_{i=0}^{d-1} \pi^i (F_{i+1}' - \pi Y_{i+1} + Y_i) - \pi^d P_d = \sum_{i=1}^{d} \pi^{i-1} F_i'.$$

Тем самым $\tilde{f}$ определяет гомоморфизм

$$f\colon A[X_1, \ldots, X_{n+1}]/(F) \to A[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_d]/(F_1', \ldots, F_d').$$

Тот факт, что f — изоморфизм, легко следует из построения $\tilde{f}$.

3.3.6. ЛЕММА. *Пусть* $F=\pi X_{n+1}-P(X_1, \ldots, X_n]-\pi Q(X_1, \ldots, X_n)\in$ $\in A[X_1, \ldots, X_{n+1}]$, *где* $P=P(X_1, \ldots, X_n)$ — *неприводимый по* $\bmod \pi$ p-*полином. Существует квази-радикальное расширение* $A'\supset A$ *и изоморфизм*

$$f\colon A'[X_1, \ldots, X_{n+1}]/(F) \to A'[Y_1, \ldots, Y_n]$$

такие, что

$$f(X_i) = R_i(Y_1, \ldots, Y_n) + \pi\Phi_i(Y_1, \ldots, Y_n),$$

где R_i — p-полиномы.

Доказательство. Очевидно, можно считать, что ненулевые коэффициенты многочлена P обратимы. Применяя лемму 3.3.4, мы найдем квази-радикальное расширение $A'\supset A$ и p-полиномиальный изоморфизм

$$f_1\colon A'[X_1, \ldots, X_{n+1}] \to A'[T_1, \ldots, T_n, X_{n+1}]$$

такой, что

$$f_1(F) = \pi X_{n+1} - T_1 - \pi Q'(T_1, \ldots, T_n).$$

Запишем полином Q' в виде

$$Q'(T_1, \ldots, T_n) = Q_1'(T_2, \ldots, T_n) + T_1 Q_2'(T_1, \ldots, T_n)$$

и рассмотрим изоморфизм

$$f_2\colon A'[T_1, \ldots, T_n, X_{n+1}] \to A'[T_1, \ldots, T_n, S],$$

определяемый следующей формулой:

$$f_2(T_i) = T_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$f_2(X_{n+1}) = S - T_1 Q_2'(T_1, \ldots, T_n).$$

Имеем:

$$f_2 \circ f_1(F) = \pi(S - Q_1'(T_2, \ldots, T_n)) - T_1,$$

откуда, переходя к факторкольцу, получим изоморфизм

$f_3\colon A'[X_1, \ldots, X_{n+1}]/(F) \to A'[T_1, \ldots, T_n, S]/(\pi(S - Q_1'(T_2, \ldots, T_n)) - T_1)$.

Взяв композицию этого изоморфизма с изоморфизмом

$$A'[T_1, \ldots, T_n, S]/(\pi(S - Q_1'(T_2, \ldots, T_n)) - T_1) \to A'[Y_1, \ldots, Y_n],$$

определяемым формулами

$$T_i \mapsto Y_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, n,$$

$$S \mapsto Y_n,$$

$$T_1 \mapsto \pi Y_n - \pi Q_2'(Y_1, \ldots, Y_{n-1}),$$

мы получим изоморфизм

$$f\colon A'[X_1, \ldots, X_{n+1}]/(F) \to A'[Y_1, \ldots, Y_n].$$

Из построения f легко видеть, что

$$f(X_i) = R_i(Y_1, \ldots, Y_n) + \pi\Phi_i(Y_1, \ldots, Y_n),$$

где $R_i(Y_1, \ldots, Y_n)$ — p-полиномы.

3.3.7. Доказательство теоремы 3.3. По определению существует подмножество $\bar{I} = \{i_1, \ldots, i_{N-n}\} \subset [1, N]$ такое, что $A[G] \cong A[X_1, \ldots, X_N]/(F_1, \ldots, F_{N-n})$, где $F_j = \pi^{d_j} X_{i_j} - P_j(X_1, \ldots, X_{i_j-1})$, $j = 1, \ldots, N-n$, P_j — p-полиномы, а $\pi^{d_j} \mid p$.

а) (Редукция к случаю, когда $d_j = 1$, а ненулевые коэффициенты полиномов P_j обратимы.) Представим многочлен $P_1(X_1, \ldots, X_{i_1-1})$ в виде

$$P_1 = P_1^{(0)} + \pi P_1^{(1)} + \ldots + \pi^{d_1-1} P_1^{(d_1-1)} + \pi^{d_1} P_1^{(d_1)},$$

где $P_1^{(i)}$ $(i = 0, \ldots, d_1 - 1)$ — p-полиномы с обратимыми ненулевыми коэффициентами. Применяя лемму 3.3.5, мы получаем гомоморфизм

$$\tilde{f}_1 \colon A[X_1, \ldots, X_N] \to A[Y_1, \ldots, Y_{i_1-1}, Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_1+d_1}, \ldots, Y_{N+d_1}]$$
$$(X_i \mapsto Y_i, \quad 1 \leqslant i < i_1,$$
$$X_i \mapsto Y_{i+d_1}, \quad i_1 < i \leqslant N,$$
$$X_{i_1} \mapsto Y_{i_1+d_1} - P_1^{(d_1-1)}(Y_1, \ldots, Y_{i_1-1})),$$

индуцирующий изоморфизм

$$f_1 \colon A[X_1, \ldots, X_N]/(F) \to A[Y_1, \ldots, Y_{N+d_1}]/(F_1^{(1)}, \ldots, F_1^{(d_1)}),$$

где

$$F_1^{(i)} = \pi Y_{i_1+i-1} - Y_{i_1+i-2} - P_1^{(i-1)}(Y_1, \ldots, Y_{i_1-1}), \quad 2 \leqslant i \leqslant d,$$
$$F_1^{(1)} = \pi Y_{i_1} - P_1^{(0)}(Y_1, \ldots, Y_{i_1-1}).$$

Так как $\tilde{f}_1$ — p-полиномиальный гомоморфизм, то

$$\tilde{f}_1(F_2) = F_2' = \pi^{d_2} Y_{i_2+d_1} - P_2(Y_1, \ldots, Y_{i_2+d_1-1}) - pQ(Y_1, \ldots, Y_{i_2+d_1-1}),$$

где P_2—p-полином. Представим F_2' в виде

$$F_2' = \pi^{d_2} Y_{i_2+d_1} - P_2^{(0)} - \pi P_2^{(1)} - \ldots - \pi^{d_2}(P_2^{(d_2)} + p\pi^{-d_2} Q),$$

где ненулевые коэффициенты $P_2^{(i)}$ $(0 \leqslant i \leqslant d_2 - 1)$ обратимы. Применяя к F_2' лемму 3.3.5, мы получим изоморфизм

$$f_2 \colon A[X_1, \ldots, X_n]/(F_1, F_2) \to$$
$$\to A[Z_1, \ldots, Z_{N+d_1+d_2}]/(\overline{F}_1^{(1)}, \ldots, \overline{F}_1^{(d_1)}, \overline{F}_2^{(1)}, \ldots, \overline{F}_2^{(d_2)}),$$

где

$$\overline{F}_1^{(1)} = \pi Z_{i_1} - P_1^{(0)}(Z_1, \ldots, Z_{i_1-1}),$$
$$\overline{F}_1^{(i)} = \pi Z_{i_1+i-1} - Z_{i_1+i-2} - P_1^{(i-1)}(Z_1, \ldots, Z_{i_1-1}), \quad 2 \leqslant i \leqslant d_1,$$
$$F_2^{(1)} = \pi Z_{i_2+d_1} - P_2^{(0)}(Z_1, \ldots, Z_{i_2+d_1-1}),$$
$$F_2^{(i)} = \pi Z_{i_2+d_1+i-1} - Z_{i_2+d_1+i-2} - P_2^{(i-1)}(Z_1, \ldots, Z_{i_2+d_1-1}), \quad 2 \leqslant i \leqslant d_2.$$

Продолжая этот процесс, мы получим в конце концов изоморфизм

$$A[X_1, \ldots, X_N]/(F_1, \ldots, F_{N-n}) \to A[T_1, \ldots, T_{N+d}]/(F_1', \ldots, F_{N-n+d}'),$$

где $d = d_1 + \ldots + d_{N-n}$ и для некоторого подмножества $\overline{I}' = \{i_1, \ldots, i_{N-n+d}\} \subset [1, N]$ $F_j' = \pi T_{i_j} - P_j(T_1, \ldots, T_{i_j-1})$, а P_j — p-полиномы, ненулевые коэффициенты которых обратимы. Тем самым мы можем считать, что $d_j = 1$ и ненулевые коэффициенты P_j обратимы.

б) Так как замкнутый слой G_0 схемы G целостен, то k-алгебра $k[G_0]$ целостна. Имеем:

$$k[G_0] = k[X_1, \ldots, X_N]/(\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_{N-n}),$$

где $\overline{P}_i$ — образы многочленов P_i при гомоморфизме редукции $A[X_1, \ldots, X_N] \to k[X_1, \ldots, X_N]$. В частности, многочлены $\overline{P}_i(X_1, \ldots, X_N)$ неприводимы.

в) (окончание доказательства). Пусть

$$B_j = A[X_1, \ldots, X_{i_j}](F_1, \ldots, F_j), \quad j = 1, \ldots, N-n.$$

В силу леммы 3.3.6 существует чисто-радикальное расширение $A' \supset A$ и изоморфизм

$$f_1 : B_1' = B_1 \otimes_A A' \to A'[Y_1, \ldots, Y_{i_1-1}]$$

такие, что

$$f_1(X_i) = R_i(Y_1, \ldots, Y_{i_1-1}) + \pi\Phi_i(Y_1, \ldots, Y_{i_1-1}), \quad 1 \leqslant i \leqslant i_1,$$

где $R_i(Y_1, \ldots, Y_{i_1-1})$ — p-полиномы. Продолжим изоморфизм f_1 до изоморфизма

$$\tilde{f}_1 : B_2' = B_2 \otimes_A A' = B_1'[X_{i_1+1}, \ldots, X_{i_2}]/(\pi X_{i_2} - P_2(X_1, \ldots, X_{i_2-1})) \to$$
$$\to A'[Y_1, \ldots, Y_{i_1-1}, Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_2-1}]/(\pi Y_{i_2-1} - P_2'(Y_1, \ldots, Y_{i_2-2}) -$$
$$- \pi Q(Y_1, \ldots, Y_{i_1-2})),$$

полагая

$$\tilde{f}_1(X_i) = f_1(X_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant i_1,$$
$$\tilde{f}_1(X_i) = Y_{i-1}, \quad i_1 < i \leqslant i_2.$$

Очевидно, $P_2'(Y_1, \ldots, Y_{i_2-2})$ — неприводимый p-полином. Таким образом, можно снова применить лемму 3.3.6 и продолжить аналогичные рассуждения. Окончательно, мы получим для некоторого квази-радикального расширения $\tilde{A} \supset A$ нужный нам изоморфизм

$$\tilde{f} : \tilde{A}[G] = B_{N-n} \otimes_A \tilde{A} \to \tilde{A}[Z_1, \ldots, Z_n]$$

и тем самым докажем теорему 3.3.

3.4. Следствие. *В условиях теоремы п.* 3.3 *предположим, что поле вычетов k совершенно. Тогда* $G \cong \mathbf{A}_A^n$.

Действительно, так как k совершенно, то расширение $A' \supset A$ из утверждения теоремы 3.3 необходимо совпадает с A.

3.5. Применение теоремы 3.3 к унипотентным группам основано на 2.4.0 и 3.1.

ТЕОРЕМА. *Пусть S — локально нетерова регулярная целостная схема размерности* $\leqslant 1$ *над полем k характеристики p. Пусть G — комму-*

тативная гладкая унипотентная S-схема групп с общим слоем периода p и со связными слоями размерности n. Тогда G является формой $\mathbf{A}^n_S$ относительно радикальной топологии (ср. 0.10.2).

Доказательство. В случае $\dim S=0$ утверждение известно (0.7.3 в)). Пусть $\dim S=1$. Используя стандартную технику Гротендика перехода к проективному пределу ((EGA), IV.8.5), можно считать, что $S=\operatorname{Spec} A$, где A — кольцо дискретного нормирования. Пусть K — поле частных A. В силу 0.7.3 в) существует радикальное расширение K'/K такое, что $G_K\otimes_K K'\cong \mathbf{G}^n_{a,K'}$. Пусть S' — нормализация S в поле K'. Тогда $S'=\operatorname{Spec} A'$, где A' — кольцо дискретного нормирования и канонический морфизм $\operatorname{Spec} A'\to\operatorname{Spec} A$ радикален. Взяв теперь вместо G схему групп $G'=G\times_A S'$, мы попадаем, ввиду 0.7.3 в), в условия 2.5. Тем самым G'—p-полиномиальная A'-схема. Так как условия гладкости и связности слоев сохраняются при плоской замене, то мы можем применить к G' теорему 3.3. В результате мы получим квази-радикальное расширение $A''\supset A'$ такое, что $G'\otimes_{A'}A''\cong\mathbf{A}^n_{A''}$. Так как $A'\supset\mathbf{F}_p$, то морфизм $\operatorname{Spec} A''\to\operatorname{Spec} A'$ радикален (ср. 3.3.2) и тем самым радикальна композиция $S''=\operatorname{Spec} A''\to\operatorname{Spec} A'\to\operatorname{Spec} A$.

3.6. Следствие. *В условиях теоремы* 3.5 *дополнительно предположим, что общий слой G_η изоморфен $\mathbf{G}^n_{a,\eta}$ и что поля вычетов замкнутых точек S совершенны. Тогда G является формой $\mathbf{G}^n_{a,S}$ в топологии Зарисского.*

Немедленно следует из 3.4 и доказательства 3.5.

3.7. Предложение. *Пусть S — локально нетерова регулярная целостная схема размерности $\leqslant 1$. Каждая гладкая групповая модель $\mathbf{G}_{a,\eta}$ над S со связными слоями есть форма $\mathbf{G}_{a,S}$ в топологии Зарисского.*

Доказательство этого предложения в точности аналогично доказательству теоремы 3.5 и следствия 3.6, в которых вместо теоремы 3.3 используется следующая

ЛЕММА. *Пусть G — гладкая модель $\mathbf{G}_{a,K}$ над A со связными слоями. Тогда $G\cong\mathbf{G}_{a,A}$.*

Доказательство. Согласно 2.3.0, $A[G]=A[y_1,\ldots,y_N]$, причем в нашем случае $\bar{I}=[2,N]$. Мы покажем, что $\bar{I}\neq\varnothing$.

Допустим, что $\bar{I}\neq\varnothing$. Тогда $A[G]$ задается соотношениями

$$\pi^{d_i}y_i=y_{i-1}^{p^{r(i)}}+P_i(y_1,\ldots,y_{i-1}),\quad i=2,\ldots,N,$$

где $\deg P_i<\deg y_i$. Рассмотрим $k[G]=k[y_1,\ldots,y_N]$,

$$y_{i-1}^{p^{r(i)}}+\bar{P}_i(y_1,\ldots,y_{i-1})=0,\quad i=2,\ldots,N.$$

Положим $B=k[y_1,y_2]\subset k[G]$. Вложение $B\to k[G]$ определяет эпиморфизм $G\to\operatorname{Spec} B$. (Наличие на $\operatorname{Spec} B$ структуры группы следует из линейной унипотентности G.) Отсюда видно, что $\operatorname{Spec} B$ должна быть одномерной гладкой связной унипотентной схемой групп. Однако

$$B=k[X_1,X_2]/X_1^{p^{r(2)}}-\bar{P}_1(X_1),\quad \deg\bar{P}(X_1)<p^{r(2)},$$

и не является геометрически целостным кольцом. Поэтому $\bar{I}=\varnothing$ и $A[G]=A[y_1]$, что и требовалось.

3.8. В этом пункте мы прокомментируем результаты этого параграфа.

3.8.1. Доказательство теоремы 3.3 существенно упрощается, если кольцо A равнохарактеристическое. Действительно, лемма 3.3.1 показывает, что образ p-полинома относительно p-полиномиального гомоморфизма есть снова p-полином. Этот факт позволяет существенно упростить лемму 3.3.6, а вместе с тем и доказательство теоремы.

3.8.2. По-видимому, следствие 3.4 можно усилить, если потребовать вместо совершенности поля вычетов существование изоморфизма замкнутого слоя $G_0\cong\mathbf{A}_k^n$. Для этого надо показать, что в этом случае справедлива лемма 3.3.4, в которой $A'=A$.

3.8.3. Результаты 2.3.0, 3.3—3.6 делают правдоподобной следующую гипотезу.

Гипотеза 1. *Пусть S — нормальная локально нетерова целостная схема и G — гладкая аффинная унипотентная S-схема групп со связными слоями. Тогда G является формой $\mathbf{A}_S^n$ относительно* fppf*-топологии. Если, кроме того, S — равнохарактеристическая схема, то же самое верно относительно радикальной топологии.*

Отметим, что условие аффинности в гипотезе 1 существенно (см. пример 6.2). Если S — схема нулевой характеристики, то гипотеза 1 верна в силу 0.8.1.

3.8.4. В случае, когда $\dim S=1$, предыдущая гипотеза следовала бы из теоремы 3.3 и следующей гипотезы.

Гипотеза 2. *Пусть A — кольцо дискретного нормирования. Каждая унипотентная групповая модель аффинного пространства является p-полиномиальной A-схемой.*

3.8.5. Очевидно, гипотеза 1 является частным случаем такого утверждения:

Пусть S — такая же, как и в гипотезе 1, *и X — аффинная S-схема такая, что $\forall s\in S$ слой $X_s\cong\mathbf{A}_s^n$. Тогда X — форма $\mathbf{A}_S^n$ в топологии Зарисского.*

Как показал В. И. Данилов (не опубликовано), это утверждение верно, если $n=1$ (ср. 3.7). Предыдущее утверждение тесно связано с одним результатом Бринского ([5]).

§ 4. Композиционные ряды

Обозначения — те же, что и в 3.0.0.

4.1. ТЕОРЕМА. *Пусть G — унипотентная групповая модель $\mathbf{A}_K^u$ над A. Пусть $\tilde{H}$ — нормальный делитель группы G_K, изоморфный $\mathbf{A}_K^m$. Тогда существует нормальная в G групповая аффинная модель H такая, что $H_K=\tilde{H}$. Фактор G/H существует и является групповой моделью группы $G_K/\tilde{H}$.*

Доказательство. Пусть $K[G]=K[x_1,\ldots,x_n]$, $K[G_K/\tilde{H}]=K[x_1,\ldots,x_{n-m-1}]$ (здесь мы пользуемся теоремой ([7]), IV, § 4, 4.1). Будем,

кроме того, считать, что x_i примитивно по модулю $x_1, \ldots, x_{i-1}$ (см. [7], IV, § 4, 4.1). Положим $B = A[G] \cap K[x_1, \ldots, x_{n-m-1}]$. Ядро гомоморфизма $G \to \operatorname{Spec} B$ имеет своим кольцом кольцо $A[G]/(y_i,\ i \in \Omega_{n-m-1})$ (см. 2.2.1). Ввиду 2.2.4а) ядро плоско. Обозначим его через H. Ввиду сказанного выше G, $\operatorname{Spec} B$, H и гомоморфизмы $H \to G$, $G \to \operatorname{Spec} B$ плоски. По построению $H_K = H$, что и требовалось.

4.2. Пусть G — та же, что и в 4.1. Ряд групповых моделей

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_i \supseteq \ldots$$

будем называть *моделью ряда*

$$G_K = G_{0,K} \supseteq G_{1,K} \ldots \supseteq G_{i,K} \supseteq \ldots,$$

если факторы G_i/G_{i+j} существуют.

ТЕОРЕМА. *Пусть G — унипотентная групповая модель $\mathbf{A}^n$ над A. В G имеются модели следующих рядов:*

а) *композиционного ряда, факторы которого суть $G_{a,K}$;*

б) *верхнего и нижнего центрального ряда;*

в) *характеристического композиционного ряда, факторы которого суть модели $G^n_{a,K}$.*

Доказательство получается применением теоремы 4.1 с учетом [7], IV, § 4, 4.1 и 0.7.3в).

4.2.1. Примеры 6.3, 6.7.5 показывают, что гладкая унипотентная групповая модель со связными слоями может не иметь ряда из гладких схем групп со связными слоями.

4.3. Теорема 4.2 является частным случаем следующего общего утверждения, доказательство которого основано на глубоких результатах Рейно и Анантарамана о существовании факторов плоских схем групп над одномерными базами [[4], [14]].

ТЕОРЕМА. *Пусть G — плоская S-схема групп конечного типа над локально нетеровой одномерной регулярной целостной схемой S. Пусть η — общая точка S и*

$$G_\eta = \widetilde{G}_0 \supseteq \widetilde{G}_1 \supseteq \ldots \supseteq G_n = \{0\}$$

— композиционный ряд общего слоя G_η. Тогда существует композиционный ряд группы G, являющийся моделью этого ряда.

Доказательство. В силу (EGA), IV.2.8.5, схематическое замыкание G_i подгрупп $\widetilde{G}_i$ будут плоскими S-схемами групп. Остается воспользоваться результатом [4] о существовании и аффинности [18] факторов G_i/G_{i+1}.

4.4. Положим

$$\Phi_a(x) = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^{p^a-1} C^\alpha_{p^a} x^\alpha \otimes x^{p^a-\alpha}.$$

Заметим, что в характеристике p

$$\Phi_a(x) = \Phi_1(x^{p^{a-1}}).$$

ЛЕММА. *Пусть L — поле характеристики p, G — унипотентная коммутативная группа, изоморфная как схема $\mathbf{A}^n_L$. Тогда можно так выбрать образующие $x_1, \ldots, x_n$ кольца $L[G]$, что*

$$\eta(x_i) = \sum_{j<i} \sum_{\alpha} a_{ij\alpha}\Phi_\alpha(x_j). \qquad (*)$$

Доказательство. Согласно ([7]), IV, § 4, 4.1, группа G имеет композиционный ряд из групп $G_{a,\,L}$. Согласно ([7]), II, § 3, 4.6 и III, § 4, 6.6, G задается такими формулами, если $n=2$. Применим индукцию по n. Допустим, что утверждение верно для $n\leqslant t$ и докажем его для $n=t+1$. Имеем:

$$1 \to G_a \to G \to H \to 1,$$

$\dim H=t$, $L[H]=L[x_1, \ldots, x_t]$ и для $\eta(x_i)$, $i\leqslant t$, имеют место формулы $(*)$. Положим $H_1=\operatorname{Spec} L[x_1, \ldots, x_{t-1}]$. Тогда имеет место точная последовательность

$$1 \to H_2 \xrightarrow{\varphi} H \xrightarrow{\psi} H_1 \to 1,$$

где $H_2 \cong G_a$.

Группа G определяется коциклом $\alpha \in H^2(G_a, H)$ (см. ([7]), II, § 3, 4.6). Имеем:

$$H^2(G_a, H_2) \xrightarrow{\varphi_*} H^2(G_a, H) \xrightarrow{\psi_*} H^2(G_a, H_1)$$

(точность в среднем члене). $\psi_*(\alpha)$ соответствует формулам вида $(*)$ по предположению индукции, поэтому можно считать, что $\psi_*(\alpha)=0$. Но тогда $\alpha \in \operatorname{Im}\varphi_*$, следовательно, α снова задается формулами вида $(*)$, что и требуется.

4.5. ТЕОРЕМА. *Пусть $\widetilde{G}$ — унипотентная группа над $k=A/\pi$, изоморфная $\mathbf{A}^n_k$. Тогда существует такая унипотентная групповая схема групп G над A, что $G_k \cong \widetilde{G}$, причем $G \cong \mathbf{A}^n_A$. В частности, если поле совершенно, то любая гладкая связная группа над этим полем поднимается в характеристику* 0.

Доказательство. Пусть $k[\widetilde{G}]=k[x_1, \ldots, x_n]$,

$$\eta(x_i) = \sum_{j<i} \sum_{\alpha} \bar{a}_{ij\alpha}\Phi_\alpha(x_j), \quad \bar{a}_{ij\alpha} \in k.$$

Выберем такие $a_{ij\alpha} \in A$, что редукция $a_{ij\alpha}$ равна $\bar{a}_{ij\alpha}$. Положим $A[G]=A[y_1, \ldots, y_n]$,

$$\eta(y_i) = \sum_{j<i} \sum_{\alpha} a_{ij\alpha}\Phi_\alpha(y_j).$$

Ясно, что тогда редукция $A[G]$ есть $\widetilde{G}$ и надо только проверить, что эти формулы задают групповой закон. Ясно также, что достаточно проверить эти формулы в случае $n=2$, $\eta(y_1)=0$, $\eta(y_2)=\Phi_\alpha(y_1)$. Это проверяется непосредственно.

4.6. Замечание. Условия теоремы 4.5 существенны. Например, нетривиальные формы группы G_a (если A/π несовершенно, см. 0.7.2г)) не поднимаются до унипотентных групп в характеристику 0.

Действительно, если $\operatorname{char} K=0$, $\dim G=1$, то $G_K \cong G_{a,K}$ и потому применимо предложение 3.7.

4.7. ТЕОРЕМА. *Расширения $G_{a,A}$ с помощью $G_{a,A}$ над кольцом A имеют координатным кольцом $A[y_1, y_2]$ с законом композиции*

$$\eta(y_1)=0, \quad \eta(y_2)=\sum_i a_i \Phi_i(y_1), \quad a_i \in A.$$

В частности, множество расширений изоморфно свободному модулю над некоммутативным кольцом (A/p) [F], где F *— оператор Фробениуса (в A/p).*

Доказательство. Покажем сначала, что второе утверждение теоремы следует из первого. Действительно, $y_1 \to y_1$, $y_2 \to y_2+P(y_1)$ — единственные замены координат, которые не меняют расширения (в случае, если оно нетривиально). Чтобы такие замены сохраняли вид наших формул, необходимо, чтобы $P(y_1)$ был p-полиномом, $P(y_1)=\Sigma b_i y_1^{p^i}$. Но тогда в новых координатах мы будем иметь:

$$\eta(y_1)=0, \quad \eta(y_2)=\sum (a_i+pb_i)\Phi_i(y_1).$$

Так как, кроме того, в A/p $\Phi_{i+j}(y)=(\Phi_j(y))^{p^i}$, то наше утверждение доказано.

Пусть G — расширение $G_{a,A}$ с помощью $G_{a,A}$. Тогда $G \cong \mathbf{A}^2_A$, т. е. $A[G]=A[y_1, y_2]$. Можно считать, что вложение $A[y_1] \to A[G]$ соответствует проекции нашего расширения. Тогда мы имеем $\eta(y_1)=0$. Автоматически $\eta(y_2) \in A[y_1] \otimes A[y_1]$.

Рассмотрим отдельно случаи $\operatorname{char} K=0$ и $\operatorname{char} K=p>0$.

4.7.1. Путь сначала $\operatorname{char} K=0$. Тогда $K[G]=K[x_1, x_2]$, $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$. Можно считать, что $x_1=y_1$. В этом случае $y_2=Q(x_1, x_2)$ и ввиду условий $\eta(y_2) \in A[y_1] \otimes A[y_1]$ и $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$ имеем $y_2=bx_2+P(x_1)$. Покажем, что $P(x_1)$ допустимыми заменами приводится в виду $P(x_1)=\Sigma r_i x_1^{p^i}$ и $pr_i \in A$. Отсюда будет следовать утверждение теоремы, причем $a_i=pr_i$. Пусть $P(x_1)=\Sigma b_i x_1^i$. Допустим, что для $i \geqslant q$ мы показали, что $pb_i \in A$ и что можно считать выполненным равенство

$$\sum_{i \geqslant q} b_i x_1^i = \sum r_i x_1^{p^i}.$$

Покажем, что если $\deg b_{q-1} x_1^{q-1} \neq p^a$, то $b_{q-1} \in A$; тогда, применяя (2.3.1.3), можно считать, что $b_{q-1}=0$. Действительно, полагая $z=\sum_{i \geqslant q} b_i x_1^i$, имеем:

$$\eta(z)=\sum pr_i \Phi_i(x_1), \quad pr_i \in A.$$

Применяя (2.3.2.3) к $\eta(b_{q-1}x_1^{q-1})$, получаем:

$$b_{q-1} C_{q-1}^i \in A \quad \forall\, i \in [1, q-2].$$

Если $q-1 \neq p^a$, то отсюда следует, что $b_{q-1} \in A$, что и требовалось. Если $q-1=p^a$, то мы получаем из (2.3.3.3): $b_{q-1} \cdot p \in A$, что завершает шаг индукции.

4.7.2. Если теперь $\operatorname{char} K = p$, то $K[G] = K[x_1, x_2]$, $x_1 = y_1$, $\eta(x_2) = \sum \tilde{a}_i \Phi_i(x_1)$, $\tilde{a}_i \in K$ (см. (7), II, § 3, 4.6 и III, § 4, 6.6). Имеем: $y_2 = bx_2 + \sum b_i x_1^i$. Заменяя x_2 на bx_2, получаем: $b = 1$, $\eta(x_2) = \sum a_i \Phi_i(x_1)$. Проводя, как и выше, индукцию, находим, что (см. 2.3.2.3) $\sum b_i x_1^i = \sum r_i x_1^{p^i}$, откуда $\eta(y_2) = \sum a_i \Phi_i(x_1)$, что и требуется.

4.7.3. Замечание. Доказательство 4.7.1 фактически не использует того условия, что A — равнохарактеристическое кольцо дискретного нормирования. Именно, пусть A — локальное целостное кольцо, K — его поле частных, $\operatorname{char} K = 0$. Пусть B — целое замыкание $\mathbf{Z}$ в A. Тогда B — кольцо дискретного нормирования. Пусть π — униформизующая B, $p = \operatorname{char} B/\pi$, $D = A \otimes \mathbf{Q}$, и пусть G — расширение $G_{a,A}$ с помощью $G_{a,A}$. Тогда, согласно 0.8.1, $G_D \cong G_{a,D}^2$. Так как $A[G] = A[y_1, y_2]$, $\eta(y_1) = 0$, $\eta(y_2) \in A[y_1] \otimes A[y_1]$, то $y_2 = bx_2 + P(x_1)$, где $b \in \bar{\mathbf{Q}}$, $P(x_1) \in D[x_1]$. В частности, $\pi P(x_1) \in A[x_1]$ для подходящего a.

После этих замечаний доказательство 4.7.1 проходит без изменений и приводит к следующему результату.

ТЕОРЕМА. *Пусть A — локальное целостное кольцо с полем частных характеристики 0 и полем вычетов характеристики $p > 0$. Над кольцом A имеют место выводы теоремы* 4.7.

§ 5. Когомологии коммутативных унипотентных групп

5.0. Обозначения — те же, что и в 3.0.0. Пусть, кроме того, $S = \operatorname{Spec} A$, η — общая точка A, s — замкнутая точка A. В этом параграфе мы вычисляем когомологии коммутативных унипотентных групп G над A. При этом когомологии $H_\alpha^i(X,)$ рассматриваются относительно fpqc-топологии ($\alpha = 1$), fppf-топологии ($\alpha = 2$), этальной топологии ($\alpha = 3$) схемы X.

Все схемы групп, рассматриваемые в этом параграфе, предполагаются коммутативными.

5.1. Следующие результаты относятся к «теоремам сравнения» когомологий относительно различных топологий:

5.1.1. (Гротендик ([8])). Если G — гладкая схема групп над произвольной схемой X, то

$$H_2^i(X, G) \cong H_3^i(X, G), \quad i \geqslant 0.$$

5.1.2 (Мияниши ([10])). Для любой X-схемы групп G

$$H_1^1(X, G) \cong H_2^1(X, G).$$

5.2. Напомним стандартные вычисления когомологий «элементарных» унипотентных групп над полем k характеристики $p > 0$.

5.2.0. Основой для этих вычислений являются точные последовательности

$$0 \to \alpha_p \to \mathbf{G}_a \xrightarrow{F} \mathbf{G}_a \to 0, \qquad (*)$$

$$0 \to (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k \to \mathbf{G}_a \xrightarrow{\mathfrak{p}} \mathbf{G}_a \to 0. \qquad (**)$$

Здесь $F: x \to x^p$, а $\mathfrak{p}: x \to x^p - x$. Первая из этих последовательностей является точной только в fpqc- и fppf-топологиях, а вторая точна и в этальной топологии.

5.2.1. В силу 5.1.1 и (SGAA), IX.4.3, для любой аффинной базы X

$$H^i(X, \mathbf{G}_{a,X}) = 0, \quad i > 0.$$

5.2.2. Применяя точные последовательности групп когомологий к последовательностям (*) из 5.2.0, мы получаем из 5.2.1:

$$H^i_\alpha(k, \alpha_p) = \begin{cases} k^+/k^{+p}, & i = 1, \\ 0, & i \neq 1 \end{cases}$$

$$(\alpha = 1, 2).$$

Так как ограничение пучка α_p на S_{et} равно нулю, то

$$H^i_3(k, \alpha_p) = 0, \quad i \geqslant 0.$$

5.2.3. Аналогично, пользуясь 5.2.1 и точной последовательностью (**) из 5.2.0, находим:

$$H^i_\alpha(k, (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k) = \begin{cases} \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, & i = 0, \\ k^+/\mathfrak{p}(k^+), & i = 1, \\ 0, & i > 1 \end{cases}$$

$$(\alpha = 1, 2, 3).$$

В силу теоремы Витта (ср. ([17]) стр. 447), если k — локальное поле, то

$$k^+/\mathfrak{p}(k^+) \cong \mathrm{Hom}(k^*/k^{*p}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

5.2.4. Если теперь G — этальная k-форма $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_k$, то она тривиализируется на некотором сепарабельном расширении k'/k степени, делящей $p-1$. В силу (SGAA), IX.5.2, отсюда следует, что

$$0 = H^i_3(k', (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_{k'}) \Rightarrow H^i_3(k, G) = 0.$$

Так как G гладкая, то

$$H^i_\alpha(k, G) = H^i_3(k, G) \text{ для } \alpha = 1, 2.$$

5.2.5. Собирая результаты 5.2.7—5.2.4, мы получаем следующее утверждение.

ЛЕММА. *Пусть* $G = \mathbf{G}_a$, α_p *или этальная* k*-форма* $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. *Тогда для* $\alpha = 1, 2$ *и* 3

$$H^i_\alpha(k, G) = 0 \text{ при } i \geqslant 2.$$

Если к тому же G связная и k совершенно, то

$$H^i_\alpha(k, G) = 0 \text{ при } i \geqslant 1 \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

5.3. Вычисление когомологий произвольных унипотентных групп над k основывается на существовании для таких групп композиционного ряда из элементарных групп (0.7.3).

В частности, мы получаем следующее

Предложение. *Пусть G — унипотентная k-группа. Тогда $H^i_\alpha(k, G) = 0$ при $i \geqslant 2$ ($\alpha = 1, 2, 3$). Если, кроме того, G связна и k совершенно, то $H^i_\alpha(k, G) = 0$ при $i \geqslant 1$ ($\alpha = 1, 2, 3$). Если G связна, то $H^i_3(k, G) = 0$, $i \geqslant 1$, для любого поля k. Кроме того, если k алгебраически замкнуто, то $H^i_\alpha(k, G) = 0$, $i \geqslant 1$, и $\alpha = 1, 2, 3$.*

5.4. В этом пункте мы докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА. *Пусть G — унипотентная S-группа. Предположим, что S — равнохарактеристическая и $G_\eta \simeq \mathbf{A}^n_\eta$. Тогда $H^i_\alpha(S, G) = 0$ при $i \geqslant 2$ и $\alpha = 1, 2, 3$. Если k алгебраически замкнуто, то это же верно и при $i \geqslant 1$.*

Доказательство. В силу 4.3 достаточно доказывать теорему, считая, что G — групповая модель $\mathbf{G}_{a,\eta}$. Применяя лемму 2.6 и 5.2.1, получим: $H^i_\alpha(S, G) = 0$ при $i \geqslant 2$ и всех α. Кроме того, $H^1_\alpha(S, G)$ есть коядро гомоморфизма $A^N \to A^{N-1}$, определяемого формулой

$$(a_1, \ldots, a_N) \to (F_2(a_1, a_2), \ldots, F_N(a_1, \ldots, a_N)),$$

где F_i — p-полиномы из 2.6. Если k алгебраически замкнуто, то это отображение, очевидно, сюръективно. Тем самым в этом случае $H^1_\alpha(S, G) = 0$, что и требовалось доказать.

5.5. Следствие. *Пусть G — унипотентная S-схема групп. Предположим, что $\mathrm{char}(K) = p > 0$ и общий слой G_η гладок и связен. Тогда для $\alpha = 3$ $H^i_\alpha(S, G) = 0$ при $i \geqslant 2$. То же самое верно для $\alpha = 1$ и 2, если G гладкая.*

Доказательство. Пусть K'/K — радикальное расширение такое, что $G_\eta \otimes K' \cong \mathbf{A}^n_{K'}$ (0.7) и S' — нормализация схемы S в K'. Тогда $S' \to S$ — радикальный целый сюръективный морфизм, откуда следует, что $H^i_3(S, G) \cong H^i_3(S', G_S)$ для $i \geqslant 0$ (SGAA, VIII, 1.2). Остается применить теорему 5.4 и утверждение 5.1.1.

§ 6. Примеры и контрпримеры

В этом параграфе приведены примеры, показывающие, в основном, границы, за которыми то или иное классическое утверждение или утверждение данной работы перестает быть верным. Имеются также примеры, показывающие, что условия, налагаемые в определениях и теоремах, существенны.

Ниже $\mathbf{Z}_p$ обозначает кольцо целых p-адических чисел, $\mathbf{Z}_p[(t)]$ — коль-

цо формальных рядов над $\mathbf{Z}_p$. Если A — кольцо, то K — его поле частных.

Мы полагаем

$$\eta(a) = \mu(a) - 1 \otimes a - a \otimes 1, \quad \Phi_t(a) = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=1}^{p^t-1} C_{p^t}^{\alpha} a^{\alpha} \otimes a^{p^t-\alpha}.$$

6.1. Пример унипотентной, но не линейно унипотентной группы над неприведенным кольцом. Пусть $A = \mathbf{Z}_2[u]/u^2$,

$$A[G] = A[x],$$

$$\eta(x) = ux \otimes x,$$

$$\iota(x) = -x + ux^2,$$

$$\varepsilon(x) = 0.$$

Единственный слой этой группы унипотентен. Для того чтобы избавиться от члена $ux \otimes x$, мы можем пользоваться только заменами $x \to ax + uP(x)$, $a \in A^*$. Однако такие замены не влияют на $ux \otimes x$, т. е. группа не линейно унипотентна.

6.2. Пример квазиаффинной унипотентной, но не аффинной группы над $\mathbf{Z}_p[[t]]$ (по Рейно ([12]), VII, 3). Пусть $A = \mathbf{Z}_p[[t]]$,

$$A[G] = A[x, y, z]/pz = ty + x + x^p,$$

$$\eta(x) = \eta(y) = 0, \quad \eta(z) = \Phi_1(x).$$

Тогда G — гладкая A-группа. Над $A_{(p)} = \mathbf{Q}_p[[t]]$ она изоморфна $G_a^2 = \operatorname{Spec} A_{(p)}[x, y]$ (ср. 0.7.2e)). Над $A_{(t)}$ она изоморфна $\operatorname{Spec} A_{(t)}[x, z]$ (ибо $y = \frac{1}{t}(pz - x^p - x)$) и является расширением $G_a = \operatorname{Spec} A_t[x, y]/(x)$ с помощью $G_a = \operatorname{Spec} A_{(t)}[x]$.

Пусть $s = (p, t)$. Имеем: $G_s = \operatorname{Spec} \mathbf{F}_p[x, y, z]/(x^p + x)$. В частности, G_s несвязна. Связная компонента единицы G^0 группы G является гладкой квазиаффинной группой ((SGAD), VI$_B$, 3.10) со связными слоями. Так как $\operatorname{prof}_{G-G^0}(G) = 2$, то $\Gamma(G) \to \Gamma(G^0)$ биективно [см. ([12]), VII. 3] и так как $G \neq G^0$, то G^0 не аффинна. Заметим, что при этом все слои группы G^0 являются аффинными пространствами $\mathbf{A}^2$.

6.3. Пример гладкой группы со связными слоями над $\mathbf{Z}_2$, не имеющей композиционного ряда, состоящего из гладких связных схем групп.

$$A = \mathbf{Z}_2, \quad A[G] = A[x, y, z]/2z = x^4 + y^2 + y,$$

$$\eta(x) = \eta(y) = 0, \quad \eta(z) = \Phi_2(x) + \Phi_1(y).$$

Имеем $\mathbf{F}_2[G] = \mathbf{F}_2[v, w]$, где $v = x^2 + x + y$, $w = z + v^6$, $\eta(v) = 0$, $\eta(w) = \Phi_2(v)$. Отсюда видно, что для того чтобы G было расширением G_a с помощью G_a над $\mathbf{Z}_2$, необходимо, чтобы $A[G]$ содержало элемент $\bar{v} \equiv x^2 + x + y \bmod 2 \cdot A[G]$ такой, что $\bar{v} = \alpha x + \beta y$. Но такого элемента не существует и потому G не имеет ряда из G_a (ср. 4.7, 6.7.5).

Однако вложение $A[x]\to A[G]$ определяет гомоморфизм, ядро которого есть $\operatorname{Spec} A[y, z]/2z=y^2+y$. Оно несвязно, но гладко. С другой стороны, вложение $A[y]\to A[G]$ определяет гомоморфизм, ядро которого есть $\operatorname{Spec} A[x, z]/2z=x^4$. Его слои связны, но оно не гладко.

6.4. Пример гладкой аффинной унипотентной группы со связными слоями над $A=\mathbf{Z}_2[[t]]$, для которой не существует модели (см. 4.2) нижнего и верхнего центрального ряда.

$$A[G]=A[x, y, z, u]/2u=tz^2+x^2+y,$$

$$\eta(x)=\eta(y)=0, \quad \eta(z)=2x\otimes y,$$

$$\eta(u)=tz\otimes z+2tx\otimes zy+2tzx\otimes y+2tx^2\otimes y^2+x\otimes x.$$

G — связная гладкая A-группа, $G\otimes\mathbf{Q}$ изоморфна группе унипотентных матриц порядка 3. Вложение $K[x, y]\to K[G]$ определяет гомоморфизм $G\otimes K$ в $G_{a,K}^2$ (фактор по центру).

Покажем, что модель нижнего (верхнего) центрального ряда группы G (см. 4.2) содержит не плоские группы. Действительно, такой ряд должен определяться вложением $K[x, y]\cap A[G]\to A[G]$. Ядро соответствующего гомоморфизма есть $\operatorname{Spec} A[z, u]/2u=tz^2$. Эта группа не плоская (на прямой $t=0$) (см. 0.3.2).

6.5. Пример плоской аффинной коммутативной унипотентной группы над кольцом $A=\mathbf{F}_2[[t]]$, которая не имеет композиционного ряда, состоящего из плоских одномерных групп.

$$A[G]=A[x, y, z]/t_1z=t_2y^2+x^2+ax,$$

$$\eta(x)=0, \quad \eta(y)=t_1\Phi_1(x), \quad \eta(z)=t_1\Phi_2(x).$$

Эта группа плоская. Она гладкая (но несвязная) при $a=1$ и ее слои связны при $a=0$. Над $\mathbf{F}_2[[t_2]]((t_1))$ она изоморфна группе Витта. Всякий гомоморфизм группы Витта G_K в $G_{a,K}$ задается вложением $K[f(x)]\to K[G]=K[x, y]$, $f(x)$ — p-полином. Ядро этого гомоморфизма есть $\operatorname{Spec} K[x, y]/(f(x))$.

Допустим, что G над A имеет ряд из одномерных групп. Тогда, ввиду сказанного выше, проекция этого ряда задается вложением $A[G]\cap K[f(x)]\to A[G]$. Ядро этой проекции есть $A[x, y, z]/(f(x), t_1z-t_2y^2-x^2-ax)$. Эта последняя схема имеет в точке (t_1, t_2) размерность 2 и потому не является плоской (см. 0.3.2).

6.6. Пример гладкой связной аффинной унипотентной коммутативной группы над $A=\mathbf{Z}_2[\sqrt{2}][[t]]$, не имеющей композиционного ряда, состоящего из плоских групп.

$$A[G]=A[x, y, z, u]/\sqrt{2}z=x+ty^2, \quad \sqrt{2}u=y+tz^2,$$

$$\eta(x) = \eta(y) = 0, \quad \eta(z) = \sqrt{2}ty \otimes y,$$

$$\eta(u) = \sqrt{2}tz \otimes z + 2t^2zy \otimes y + 2t^2y \otimes zy + \sqrt{2}t^3y^2 \otimes y^2.$$

Над K гомоморфизм проекции определяется вложением $K[ax+by]$ в $K[G]=K[x, y]$, $a, b\in K$. Поэтому над A гомоморфизм проекции должен определяться вложением $M=K[ax+by]\cap A[G]$ в $A[G]$. Можно, очевидно, считать, что $a, b\in A$.

Утверждается, что над прямой $t=0$ ядро любого такого гомоморфизма не плоско. Действительно, $A/(t)[G]=A[z, u]$, $x=2z$, $y=2u$. Поэтому $M\otimes A/(t)\subset 2A/(t)[G]$, откуда и следует неплоскость ядра (см. 0.3.2).

6.7. Некоторые модели G_a^2 над дискретно нормированным кольцом A с полем частных характеристики нуль. Рассматриваются аффинные групповые модели G_a^2 над A, причем A дискретно нормировано, char $K=0$, char $A/\pi=p\neq 0$. Имеем:

$$A[G] = A[x, y, z]/\pi^{d+1}z = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{p^i} + \sum_{i=0}^{n} b_i y^{p^i}, \quad a_i, b_i \in A,$$

$$\pi^{d+1} \mid p, \quad (a_m, b_n) = A,$$

$$\eta(x) = \eta(y) = 0,$$

$$\eta(z) = \pi^{-d-1} \cdot p \left[\sum_{i=1}^{m} a_i \Phi_i(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i \Phi_i(y) \right].$$

Множество таких групп обозначим через $\mathfrak{G}$. Мы называем числа d, a_i, $i\in[0, m]$, b_i, $i\in[0, n]$, параметрами группы G.

6.7.1. Пусть $A_d = A/\pi^{d+1}$, и пусть $A_d^2[\mathbf{F}]$ — аддитивная группа некоммутативных многочленов от $\mathbf{F}$, коэффициенты которых лежат в A_d^2, причем $\mathbf{F}a = a^p\mathbf{F}$, $a\in A_d$.

Пусть, далее, $\Pi_d = (d, A_d^2[\mathbf{F}])$. Набору параметров d, (a_i), (b_i) мы сопоставляем элемент из Π_d по правилу: пусть α_i — вектор с координатами (a_i, b_i), взятыми mod π^{d+1}. Тогда нашему набору сопоставляется $\left(d, \sum \alpha_i \mathbf{F}^i\right) \in \Pi_d$.

ЛЕММА. *Если $\{d, (a_i), (b_i)\}$, $\{d, (a_i'), (b_i')\}$ — два набора параметров, которым соответствует один и тот же элемент множества Π_d, то эти наборы задают изоморфные A-группы.*

Доказательство. Имеем:

$$a_1' = a_i + c_i\pi^{d+1}, \quad b_i = b_i + d_i\pi^{d+1}.$$

Замена

$$z \to z - \sum c_i x^{p^i} - \sum d_i y^{p^i}$$

переводит одну группу в другую.

Мы будем обозначать через G_ω, где $\omega\in\Pi_d$, любую A-группу, параметры которой редуцируются в ω.

6.7.2. На Π_d действует группа $\mathcal{G}_d=\mathrm{GL}_1(A_d)\times\mathrm{GL}_2(A_d)$ по формуле

$$(\lambda, D)\left(d, \sum r_i \mathbf{F}^i\right) = \left(d, \sum \lambda D^{p^i} r_i \mathbf{F}^i\right)$$

(GL_1 действует слева, а GL_2 справа).

ЛЕММА. *Пусть* φ, $\omega\in\Pi_d$. *Группы* G_ω *и* G_φ *изоморфны, если и только если* $g\omega=\varphi$ *для подходящего* $g\in\mathcal{G}_d$.

Доказательство. A-модуль $Ax+Ay$ выделяется в $A[G]$ однозначно как A-модуль примитивных элементов. Поэтому x, y определены с точностью до замены $x\to\alpha x+\beta y$, $y\to\gamma x+\delta y$, $\det\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \sigma\end{pmatrix}\in A^*$. Обозначим эту матрицу через D. Так как $\pi^{d+1}\mid p$,

$$(\alpha x+\beta y)^{p^a} \equiv \alpha^{p^a}x^{p^a} + \beta^{p^a}y^{p^a} \bmod p,$$

$$(\gamma x+\delta y)^{p^a} \equiv (\gamma^{p^a}x^{p^a} + \delta^{p^a}y^{p^a}) \bmod p,$$

то, ввиду леммы 6.7.1, мы определяем действие $\mathrm{GL}_2(A_d)$ на Π_d, которое совпадает с описанным выше.

Чтобы сохранить вид формул, мы можем допускать для z только замены

$$z\to\lambda z + \sum c_i x^{p^i} + \sum d_i y^{p^i},$$

которые в силу леммы 6.7.1 приводят к замене параметров a_i, b_i (по модулю π^{d+1}) на λa_i, λb_i. Этим задается действие GL_1, которое совпадает с описанным выше.

Если теперь две группы G_ω, G_φ изоморфны, то в силу сказанного выше должны существовать замены $x\to\alpha x+\beta y$, $y\to\gamma x+\delta y$, $z\to\lambda z+\sum c_i x^{p^i}+ + \sum d_i y^{p^i}$, которые переводят одно множество параметров в другое, что и доказывает наше утверждение.

6.7.3. Пусть $\mathcal{H}_d$ — группа автоморфизмов над A_d группы G_a^2. $\mathcal{H}_d$ порождается преобразованиями из $\mathrm{GL}_2(A_d)$ и преобразованиями D:

$$x\to x + d_0\pi\sum\alpha_i x^{p^i},$$

$$y\to y + d_0\pi\sum\beta_i y^{p^i} + \sum\gamma_i x^{p^i}$$

(где $d_0=0$, если $d=0$; $d_0=1$, если $d\neq 0$).

Положим $\widetilde{\mathcal{H}}_d=\mathrm{GL}_1\times\mathcal{H}_d$ и определим действие D на Π_d формулой

$$\left(d, \sum r_i \mathbf{F}^i\right)\to\left(d, \sum \widetilde{r}_i \mathbf{F}^i\right),$$

где

$$r_i = (r'_i, r''_i), \quad \tilde{r}_i = (\tilde{r}'_i, \tilde{r}''_i), \quad \tilde{r}''_i = \sum_{\alpha+\beta=i} r''_\alpha (\pi d\beta_\beta)^{p^\alpha},$$

$$\tilde{r}'_i = r'_i + \sum_{s+t=i} r'_s (\pi d\beta_t)^{p^s} + \sum_{s+t=i} r''_s \gamma_t^{p^s}.$$

Это действие продолжается до действия $\widetilde{\mathscr{H}}_d$ на Π_d.

ЛЕММА. *Пусть* φ, $\omega \in \Pi_d$. *Группы* $G_\omega \otimes A_d$ *и* $G_\varphi \otimes A_d$ *изоморфны над* A_d, *если и только если* $h\omega = \varphi$ *для подходящего* $h \in \widetilde{\mathscr{H}}_d$.

Доказательство отличается от доказательства предыдущего утверждения лишь тем, что модуль примитивных элементов состоит теперь из p-полиномов $\sum d'_i x^{p^i} + \sum d''_i y^{p^i}$ от x и y и $\mathscr{H}_d$ — как раз группа, сохраняющая этот модуль.

6.7.4. Следствие. *Пусть* $\omega \in \Pi_d$. *Классы изоморфизма над* A A-*групп из* $\mathfrak{G}$, *которые над* A_d *изоморфны группе* $G_\omega \otimes A_d$, *параметризуются однородным пространством* $\mathrm{GL}_2(A_d) \backslash \mathscr{H}_d$. *В частности, это множество бесконечно (и даже бесконечномерно).*

6.7.5. Следствие. *Пусть поле* $k = A_0$ *совершенно и* $\pi^m = p$. *Тогда для каждой гладкой связной группы над* k *существует* $\mathrm{GL}_2(k) \backslash \mathscr{H}_{m-1}$ *неизоморфных* A-*групп, которые редуцируются в эту группу. Только одна из этих групп (с точностью до изоморфизма) допускает гладкий ряд.*

Доказательство. Достаточно построить такую группу. Она задается одним из наборов: $d = m-1$, $a_0 = 1$, $a_i = 0$, $i > 0$, $b_i \in A$ (см. 4.7). Теперь применимо предыдущее утверждение.

6.7.6. Пусть k несовершенно. Формы G_a над k перечислены в 0.7.2. г).

Следствие. *Для любой* k-*формы* $\tilde{G}$ *группы* $G_{a,k}$ *существует бесконечно много аффинных гладких групповых моделей* $G^2_{a,K}$ *со связными слоями над* A, *которые над* k *имеют ряд*

$$0 \to G_{a,k} \to G \otimes k \to \tilde{G} \to 0.$$

Если p *разветвлено в* A, *то существует (бесконечное число) таких моделей* $G^2_{a,K}$ *над* A, *что* $G_k \cong G_{a,k} \times \tilde{G}$.

Доказательство. Бесконечность следует из 6.7.4. Пусть $\tilde{G}$ задается уравнением

$$y^{p^n} = \sum_{i=0}^{m} a_i x^{p^i}, \quad a_0 \neq 0, \quad a_i \in k$$

(см. 0.7.2 г). Положим $\omega = (0, \Sigma r_i \mathbf{F}^i)$, где $r_i = (\tilde{a}_i, 0)$ при $i \neq n$, $r_n = (\tilde{a}_n, -1)$ и $\tilde{a}_i \equiv a_i \bmod \pi$. Тогда $\omega \in \Pi_0$,

$$G_{\omega,k} = \operatorname{Spec} k[x, y, z] / \left(y^{p^n} - \sum a_i x^{p^i}\right).$$

Отображение $k[\widetilde{x}, \widetilde{y}]/\left(y^{p^n} - \sum a_i x^{p^i}\right) \to k[G_\omega]$ определяет гомоморфизм $G_{\omega,k} \to \widetilde{G}$. Ядро его есть $\operatorname{Spec} k[z] = G_{a,k}$. Если $\pi^{-1}p \notin A^*$, то $G_{\omega,k} = \widetilde{G} \times G_{a,k}$ (ввиду формул 6.7).

Поступило
8.V.1973

Литература

[1] **Grothendieck A., Diedonne J.**, Elements de Geometrie Algebrique, Publs Math. de l'IHES., № 8 (1961), № 24, 28 (1966) (EGA).

[2] Seminaire de Geometrie Algebrique 1962/64 dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck, Schémas en groupes, Lect. Notes in Math., vol. 151, 152, 153, Springer, 1970 (SGAD).

[3] Seminaire de Geometrie Algebrique 1963/64 dirigé par M. Artin et A. Grothendieck, Theorie des topos et cohomologie etale des schémas, Lect. Notes in Math., vol. 269, 270, Springer, 1972 (SGAA).

[4] **Anantharaman S.**, Schémas en groupes, espaces homogénes et espaces algébriques sur une base de dimension 1, Bull. Soc. Math. France Mémoir, 33 (1973), 5—79.

[5] **Brynski M.**, Forms of the rings $R[X]$ and $R[X, Y]$, Glasgow Math. J., 13, № 2 (1972), 91—97.

[6] **Бурбаки Н.**, Коммутативная алгебра (перевод с франц.), М., «Мир», 1972.

[7] **Demazure M., Gabriel P.**, Groupes algébrique, North-Holland, 1970.

[8] **Grothendieck** A., Le groupe de Brauer. 3, en «Dix exsposes sur cohomologie des schémas», Amsterdam — Paris (1968), 88—188.

[9] **Манин Ю. И.**, Лекции по алгебраической геометрии. I, Аффинные схемы, М., МГУ, 1970.

[10] **Miyanishi M.**, On the cohomologies of commutative affine group schemes, J. Math. Kyoto Univ., 8, № 1 (1968), 1—39.

[11] **Mumford D.**, Enriques' classification of surfaces, I, In «Global Analysis», Princeton, N. Y., 1969.

[12] **Raynaud M.**, Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes, Lect. Notes in Math., vol. 119, Springer, 1970.

[13] **Raynaud M.**, Modéles de Neron, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris., 262 (1966), A345—A347.

[14] **Raynaud M.**, Spécialisation du foncteur de Picard, Publs. Math. de l'IHES, № 38 (1970), 27—76.

[15] **Russel P.**, Forms of the affine line and its additive group, Pacific J. Math., 32, № 2 (1970), 527—539.

[16] **Серр Ж.-П.**, Алгебраические группы и поля классов, М., «Мир», 1968.

[17] **Shatz S.**, Cohomology of artinian group schemes over local fields, Ann. Math., 79, № 3 (1964), 411—449.

[18] **Simon A. M.**, Un théorème d'affinité de schéma en groupes quotient, Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. Belg., 58, № 11 (1972), 1325—1337.

[19] **Bruhat F., Tits J.**, Groupes algébriques simples sur un corps local, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 263 (1966), A822—A825.