УДК 513.015.7

Эйлерова характеристика семейства алгебраических многообразий

И. В. Долгачев (Москва)

Введение

Рассмотрим семейство алгебраических многообразий $f: X \to Y$ над неособой полной кривой Y, т. е. f — собственный, плоский морфизм алгебраических многообразий со связными слоями. Предположим, что основное поле есть поле комплексных чисел $\mathbf{C}$, и пусть F — «типический» слой морфизма f. В этом случае имеет место «хорошо известная» формула

$$\chi(X) = \chi(F)\chi(Y) + \sum_{y \in Y} \chi(X_y) - \chi(F), \qquad (*)$$

выражающая отклонение от мультипликативности эйлеровой характеристики (топологической) в терминах аналогичной характеристики вырожденных слоев X_y морфизма f. Доказательство этой формулы для случая, когда X — гладкое многообразие, можно найти в книге [1] (ограничение на размерность X, сделанное в формулировке этой теоремы, несущественно).

В этой работе мы доказываем формулу, аналогичную $(*)$ и справедливую для произвольного алгебраически замкнутого поля k характеристики $p \geqslant 0$. В этом случае естественно рассматривать l-адические эйлеровы характеристики $EP(X)$, $EP(Y)$, $EP(X_y)$, и мы доказываем (см. в § 1 разъяснения обозначений) формулу (l — простое число, отличное от p)

$$EP(X) = EP(X_{\bar\eta})\, EP(Y) + \sum_{y \in \bar{Y}} [EP(X_y) - EP(X_{\bar\eta}) + \alpha_y(f;\, l)], \qquad (**)$$

где $X_{\bar\eta}$ — геометрический слой морфизма f над общей точкой η кривой Y, а $\alpha_y(f;\, l)$ — некоторый «инвариант высшего ветвления» (равный нулю, если $p=0$ или если слой X_y гладок). Эта формула получается простым применением общей формулы Гротендика для эйлеровой характеристики конструктивного этального (накрывающего) пучка на гладкой алгебраической кривой (см. [15], [17], exp. X). В случае нормальных поверхностей X, а также произвольных многообразий с изолированными особыми точками над полем нулевой характеристики мы получаем в § 4 из формулы $(**)$ независимость $EP(X)$ от простого числа $l \neq p$. Наше доказательство является «элементарным» и не использует фундаментальных теорем об l-адических когомологиях. С помощью последних можно получить, разумеется, гораздо более сильные результаты. Именно для случая $p=0$ из теоремы Артина о сравнении для произвольных алгебраических схем ([16], exp. XVI) следует этот результат для произвольных X. В случае же $p>0$, как объяснил автору П. Делинь, для произвольных собственных k-схем этот результат можно вывести из интерпретации $EP(X)$ в виде разности степени знаменателя и степени числителя ζ-функции алгебраического многообразия над конечным полем.

В § 5 мы обсуждаем некоторые гипотезы, связанные с определением кондуктора семейства алгебраических многообразий.

§ 1. Формулировка основной теоремы

Для любой собственной схемы Z над полем k, алгебраически замкнутым и характеристики $p\geqslant 0$, мы полагаем и называем *l-адической эйлеровой характеристикой* схемы Z (l — простое число, не равное p)

$$EP(Z)=\sum_i(-1)^i b_i(Z;l),$$

где $b_i(Z;l)=\dim_{\mathbf{Q}_l} H^i(Z;\mathbf{Q}_l)$ — размерность пространства рациональных l-адических когомологий схемы Z (см. [17], exp. VI). Законность этого определения следует из теоремы конечности ([16], exp. XIV) и теоремы о конечной когомологической размерности (loc. cit., exp. X). Кроме того, как объяснялось во введении, $EP(Z)$ не зависит от l.

Всюду в дальнейшем Y обозначает гладкую связную кривую над полем k, а $\overline{Y}$ — множество ее замкнутых точек. Для любой такой точки $y\in\overline{Y}$ через $\tilde{\eta}_y$ мы будем обозначать спектр поля частных K_y гензелизации локального кольца $O^h_{Y,y}$. Пусть $i_y\colon\tilde{\eta}_y\to Y$ — соответствующий канонический морфизм. Для любого накрывающего конструктивного пучка F на Y, аннулируемого умножением на l, пучок $\tilde{F}_y=i_y^*(F)$ на $\tilde{\eta}_y$ отождествляется с конечномерным G_y-$\mathbf{F}_l$-бимодулем, где G_y — группа Галуа сепарабельного замыкания $\overline{K}_y$ поля K_y.

Для любого поля K, полного относительно дискретного нормирования, с полем вычетов k и конечномерного G_k-$\mathbf{F}_l$-бимодуля M определена «мера высшего ветвления Серра» $\delta(K,M)$ ([20], см. также [13], [15]).

Напомним ее определение. Пусть L/K — конечное расширение Галуа такое, что группа Галуа G_L действует тривиально на M. Тем самым, M можно рассматривать как G-модуль, где $G=\mathrm{Gal}(L/K)$. Пусть $G_i=\{g\in G\,|\,v_\pi(g(\pi)-\pi)\geqslant i+1\}$ (где π — униформизующая поля K) — группы высшего ветвления, $e_i=\#(G_i)$, $e=\#G$ — порядки этих групп. Тогда

$$\delta(K,M)=\sum_{i=0}\frac{e_i}{e}\dim_{\mathbf{F}_l}(M/M^{G_i}).$$

Эквивалентное определение состоит в том, что

$$\delta(K,M)=\dim_{\mathbf{F}_l}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_l[G]}(P,M),$$

где P — модуль Свана, ассоциированный с G.

Применяя это определение к G_y-модулю $\widetilde{F}_y$, положим $\delta_y(F) = \delta(K_y, \widetilde{F}_y)$.

По определению конструктивности пучка F существует такое открытое множество $U \subset Y$, что пучок F/U локально постоянен. Последнее означает, что существует такой накрывающий конечный морфизм $\varphi: V \to U$, что $\varphi^*(F)$ — постоянный пучок. Это условие эквивалентно также тому, что функция $y \mapsto \#(F_{\bar{y}})$ постоянна на U (см. [16], exp.IX). Очевидно, для любой замкнутой точки $y \in U$ имеем $\delta_y(F) = 0$. Это же верно для любой точки $y \in \overline{Y}$, если $\mathrm{char}(k) = 0$.

Пусть теперь $f: X \to Y$ — собственный плоский морфизм с геометрически связным общим слоем X_η размерности n. Пучок $\mu_{l,X} = \mathrm{Ker}(\mathbf{G}_{m,X} \xrightarrow{l} \mathbf{G}_{m,X})$ на X аннулируется умножением на l, следовательно, таковыми являются и пучки $R^i f_* \mu_{l,X}$ на Y ([16], exp. X). Кроме того, в силу теоремы конечности (loc. cit., exp. XIV) эти пучки конструктивны на Y. Тем самым мы можем положить

$$\alpha_y^i(f; l) = \delta_y(R^i f_* \mu_{l,X}), \quad \alpha_y(f; l) = \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i \alpha_y^i(f; l).$$

Теперь мы в состоянии сформулировать следующую теорему.

Теорема 1.1. *Имеет место формула*

$$EP(X) = EP(X_{\bar{\eta}}) EP(Y) + \sum_{y \in \overline{Y}} [EP(X_y) - EP(X_{\bar{\eta}}) + \alpha_y(f; l)],$$

где $X_{\bar{\eta}} = X_\eta \underset{k(\eta)}{\otimes} \overline{k(\eta)}$ — *геометрический общий слой морфизма* f.

Доказательству этой теоремы посвящен § 3.

Следствие 1.2. *Предположим, что морфизм f гладок. Тогда l-адическая эйлерова характеристика мультипликативна, т. е.* $EP(X) = EP(X_{\bar{\eta}}) EP(Y)$.

Действительно, в этом случае, пучки $R^i f_* \mu_{l^k,X}$, $k > 0$, локально постоянны (теорема о специализации [16], exp. XVI). Тем самым l-адические пучки $\varprojlim_k R^i f_* \mu_{l^k,X} = R^i f_* \mathbf{Z}_l$ локально постоянны, т. е. функция $y \mapsto b_i(X_{\bar{y}}; l)$ постоянна. Отсюда $EP(X_y) = EP(X_{\bar{\eta}})$ для любой точки $y \in \overline{Y}$. Кроме того, как мы замечали выше, инвариант $\delta_y(R^i f_* \mu_{l,X}) = \alpha_y^i(f; l) = 0$. Остается применить теорему 1.1.

Следствие 1.3. *Пусть* $\mathrm{char}(k) = 0$. *Имеет место формула*

$$EP(X) = EP(X_{\bar{\eta}}) EP(Y) + \sum_{y \in \overline{Y}} (EP(X_y) - EP(X_{\bar{\eta}})).$$

Если $k = \mathbf{C}$, *то имеем формулу*

$$\chi(x) = \chi(F)\chi(Y) + \sum_{y \in \overline{Y}} (\chi(X_y) - \chi(F)),$$

где F — произвольный слой f над некоторым открытым множеством $U \subset \overline{Y}$. Здесь χ обозначает обычную топологическую эйлерову характеристику.

Действительно, как мы замечали выше, в случае $\mathrm{char}(k)=0$ инвариант $\alpha_y(f;\, l)=0$. Если же $k=\mathbf{C}$, то в силу теоремы сравнения ([16], exp. XVI) $H^i(X, (\mathbf{Z}/l^k)_X)\simeq H^i_{\mathrm{cl}}\ (X,\ \mathbf{Z}/l^k)$, откуда

$$H^i(X,\ \mathbf{Z}_l)=\varprojlim_k H^i(X,\ (\mathbf{Z}/l^k)_X)\simeq \varprojlim_k H^i_{\mathrm{cl}}(X,\ \mathbf{Z}/l^k)\simeq$$

$$\simeq H^i_{\mathrm{cl}}(X, \mathbf{Z})\otimes \mathbf{Z}_l\oplus \text{конечная группа}$$

(последнее в силу формулы универсальных коэффициентов). Тензорно умножая на $\mathbf{Q}_l$, получаем

$$H^i(X,\ \mathbf{Q}_l)=H^i(X,\ \mathbf{Z}_l)\underset{\mathbf{Z}}{\otimes}\mathbf{Q}_l\simeq H^i_{\mathrm{cl}}(X,\ \mathbf{Z})\underset{\mathbf{Z}}{\otimes}\mathbf{Q}_l,$$

откуда $b_i(X;\, l)=\beta_i(X)$, а следовательно, $EP(X)=\chi(X)$. Аналогично доказывается равенство $EP(X_y)=\chi(X_y)$, $EP(Y)=\chi(Y)$. Остается заметить, что $EP(X_{\bar\eta})=EP(X_y)$ почти для всех $y\in\overline{Y}$, именно для любой точки $y\in U\cap\overline{Y}$, где U — открытое множество, на котором пучки $R^if_*\mu_{l^k,X}$ локально постоянны.

Отметим также следующие факты об инвариантах $\alpha^i_y(f;\, l)$.

Предложение 1.4. *Инварианты $\alpha^i_y(f;\ l)$ зависят только от общего слоя X_η морфизма f. Более точно, если $f\colon X\to Y$ и $f'\colon X'\to Y$ — собственные плоские морфизмы и $X_\eta\simeq X'_\eta$ над η, то $\alpha^i_y(f;\ l)=\alpha^i_y(f';\ l)$ для любой $y\in\overline{Y}$ и $0\leqslant i\leqslant 2\dim X_\eta$.*

Доказательство. Напомним, что $\alpha^i_y(f;\ l)=\delta_y(R^if_*\mu_{l,X})=\delta(K_y,\ (R^if_*\mu_{l,X})\tilde{}_y)$. Применяя теорему о замене базы (см. [16], exp. XI), мы получаем

$$(R^if_*\mu_{l,X})\tilde{}_y=i^*_y(R^if_*\mu_{l,X})=H^i(X\underset{Y}{\otimes}\overline{K}_y,\ \mu_l)=$$

$$=H^i(X\underset{Y}{\otimes}\eta\underset{\eta}{\otimes}\mathrm{Spec}\,\overline{K}_y,\ \mu_l)=H^i(X_\eta\underset{Y}{\otimes}\overline{K}_y,\ \mu_l).$$

Аналогично имеем

$$(R^if'_*\mu_{l,X'})\tilde{}_y=H^i(X'_\eta\underset{Y}{\otimes}\overline{K}_y,\ \mu_l),$$

откуда следует, что

$$\alpha^i_y(f;\ l)=\delta(K_y,\ (R^if_*\mu_{l,X})\tilde{}_y)=\delta(K_y,\ (R^if'_*\mu_{l,X'})\tilde{}_y)=\alpha^i_y(f';\ l),$$

что и требовалось доказать.

Предложение 1.5. *Предположим, что общий слой морфизма f гладок. Тогда для любой точки $y\in\overline{Y}$*

$$\alpha^i_y(f;\ l)=\alpha^{2n-i}_y(f;\ l),\quad 0\leqslant i\leqslant 2n=2\dim X_\eta.$$

Доказательство. Как мы видели выше при доказательстве предложения 1.4, $(R^if_*\mu_{l,X})\tilde{}_y=H^i(X_\eta\underset{Y}{\otimes}\overline{K}_y,\ \mu_l)$. Применяя двойственность Пуанкаре для накрывающих когомологий [22], получаем, что

$$(R^if_*\mu_{l,X})\tilde{}_y=\mathrm{Hom}((R^{2n-i}f_*\mu_{l,X})\tilde{}_y,\ \mu_l).$$

Положим $M_y^i = (R^i f_* \mu_{l,X})_{\bar{y}}^{\sim}$. Вспоминая определение инвариантов $\delta(K_y, M_y^i)$, мы видим, что достаточно показать, что

$$\dim_{\mathbf{F}_l}(M_y^i)^{G_j} = \dim_{\mathbf{F}_l}(\mathrm{Hom}\,(M_y^{2n-i}, \mu_l)^{G_j}),$$

где G_j — группы высшего ветвления. Но этот факт, утверждающий, что размерность инвариантных подпространств представления и сопряженного представления одинакова, хорошо известен.

Следствие 1.6. *В предположениях предложения* 1.5

$$\alpha_y^0(f;\, l) = \alpha_y^{2n}(f;\, l) = 0.$$

Действительно, $\alpha_y^0(f;\, l) = \delta_y(f_* \mu_{l,X})$. Но, так как база Y нормальна, а слои f связны, $f_* O_X = O_Y$ ([5], ch. III, 4.3). Отсюда $f_* \mathbf{G}_{m,X} = \mathbf{G}_{m,Y}$, что дает, очевидно, $f_* \mu_{l,X} = \mu_{l,Y}$. Пучок $\mu_{l,Y} \simeq (\mathbf{Z}/l)_Y$ (неканонически!) постоянен на Y, тем самым $\alpha_y^0(f;\, l) = \delta_y(\mu_{l,Y}) = 0$. Остается воспользоваться предложением 1.5.

§ 2. Формула Эйлера — Гротендика

Пусть F — конструктивный накрывающий пучок на кривой Y, аннулируемый умножением на l. В этом случае группы когомологий $H^i(Y, F)$ также аннулируются умножением на l, а следовательно, обладают естественной структурой линейного пространства над конечным полем $\mathbf{F}_l$. В частности, определена характеристика Эйлера — Пуанкаре пучка F:

$$\chi(Y, F) = \sum (-1)^i \dim_{\mathbf{F}_l}(H^i(Y, F)).$$

Аналогичным образом, $\mathbf{F}_l$-пространствами являются группы локальных когомологий $H_y^i(F)$, где y — замкнутая точка Y. Положим

$$\chi_y(F) = \sum (-1)^i \dim_{\mathbf{F}_l}(H_y^i(F)).$$

Теорема Гротендика ([15], [17], exp. X) утверждает, что

$$\chi(Y, F) = \dim_{\mathbf{F}_l}(F_{\bar{\eta}}) \cdot EP(Y) - \sum_{y \in \overline{Y}} \varepsilon_y(F), \tag{2.1}$$

где

$$\varepsilon_y(F) = \delta_y(F) + \dim_{\mathbf{F}_l}(F_{\bar{\eta}}) - \chi_y(F).$$

Дадим более явную формулу для члена $\chi_y(F)$, а вместе с тем и для всего локального инварианта $\varepsilon_y(F)$.

Лемма 2.1. $\chi_y(F) = \dim_{\mathbf{F}_l}(F_y)$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{Y}_y = \mathrm{Spec}\,(O_{Y,y}^h)$, $\tilde{i}_y : \widetilde{Y}_y \to Y$ — канонический морфизм, тогда имеем «точную последовательность пары» для локальных когомологий ([16], exp. XVII)

$$0 \to H_y^0(F) \to H^0(\widetilde{Y}_y, \tilde{i}_y^*(F)) \to H^0(\tilde{\eta}_y, \widetilde{F}_y) \to H_y^1(F) \to 0,$$

$$H^1(\tilde{\eta}_y, \widetilde{F}) \simeq H_y^2(F), \quad H_y^i(F) = 0,\ i > 2.$$

Мы воспользовались здесь тем фактом, что $H^i(\widetilde{Y}_y, i_y^*(F)) = 0$, $i > 0$, так как схема $\widetilde{Y}_y$ строго гензелева, и тем, что $H^i(\widetilde{\eta}_y, \widetilde{F}_y) = 0$, так как $\mathrm{cd}(K_y) \leqslant 1$. Имеем, таким образом,

$$\chi_y(F) = \dim_{\mathbf{F}_l}(F_y) - \dim_{\mathbf{F}_l}(\widetilde{F}_y^{G_y}) + \dim_{\mathbf{F}_l}(H^1(G_y, \widetilde{F}_y)),$$

где $G_y = \mathrm{Gal}(\overline{K}_y/K_y)$. В силу теоремы о локальной двойственности ([17], exp I, ср. также [12], [23]), $H^1(G_y, \widetilde{F}_y) \simeq \mathrm{Hom}(\widetilde{F}_y^{G_y}, \mu_l)$. Однако, очевидно (ср. с доказательством предложения 1.5)

$$\dim_{\mathbf{F}_l}(\widetilde{F}_y^{G_y}) = \dim_{\mathbf{F}_l}(\mathrm{Hom}(\widetilde{F}_y^{G_y}, \mu_l)),$$

откуда и получаем утверждение леммы.

Следствие 2.2.

$$\chi(Y, F) = \dim_{\mathbf{F}_l}(F_{\overline{\eta}}) EP(Y) - \sum_{y \in \overline{Y}} [\dim_{\mathbf{F}_l}(F_{\overline{\eta}}) - \dim_{\mathbf{F}_l}(F_y) + \delta_y(F)]. \quad (2.2).$$

§ 3. Доказательство теоремы 1.1

В этом параграфе обозначения те же, что и в предыдущих параграфах. Рассмотрим спектральную последовательность Лере для морфизма $f: X \to Y$ и пучка $\mu_{l,X}$

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_* \mu_{l,X}) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mu_{l,X}).$$

В силу инвариантности эйлеровой характеристики в спектральной последовательности, имеем

$$\chi(X, \mu_{l,X}) = \sum_i (-1)^i \chi(Y, R^i f_* \mu_{l,X}). \quad (3.1)$$

Как уже объяснялось в § 1, пучки $R^i f_* \mu_{l,X}$ конструктивны и аннулируются умножением на l. Тем самым к ним можно применить формулу Эйлера — Гротендика (2.2). В результате, получим

$$\chi(Y, R^i f_* \mu_{l,X}) = (\dim_{\mathbf{F}_l}(R^i f_* \mu_{l,X})_{\overline{\eta}}) EP(Y) -$$
$$- \sum_{y \in \overline{Y}} [\dim_{\mathbf{F}_l}(R^i f_* \mu_{l,X})_{\overline{\eta}} - \dim_{\mathbf{F}_l}(R^i f_* \mu_{l,X})_y + \delta_y(R^i f_* \mu_{l,X})]. \quad (3.2)$$

В силу теоремы о замене базы ([16], exp. XII),

$$(R^i f_* \mu_{l,X})_{\overline{\eta}} = H^i(X_{\overline{\eta}}, \mu_{l,X_{\overline{\eta}}}), \quad (R^i f_* \mu_{l,X})_y = H^i(X_y, \mu_{l,X_y}).$$

Подставляя (3.2) в (3.1) и пользуясь обозначениями §§ 1, 2, получаем

$$\chi(X, \mu_{l,X}) = \chi(X_{\overline{\eta}}, \mu_{l,X_{\overline{\eta}}}) EP(Y) + \sum_{y \in \overline{Y}} [\chi(X_y, \mu_l) - \chi(X_{\overline{\eta}}, \mu_l) + \alpha_y(f; l)]. \quad (3.3)$$

Мы воспользовались тем фактом, что $\delta_y(R^0 f_* \mu_{l,X}) = \alpha_y^0(f; l) = 0$ равно нулю (ср. с доказательством следствия 1.6).

Для доказательства теоремы 1.1 остается доказать следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть Z — собственная k-схема. Для любого простого $l \neq p$ имеем* $\chi(Z, \mu_{l,Z}) = EP(Z)$.

Доказательство. Обозначим через μ_{l^∞} пучок $\varinjlim_k \mu_{l^k, Z}$ на Z. Имеем для любого целого $k>0$ точную последовательность

$$0 \to \mu_{l^k, Z} \to \mu_{l^\infty} \xrightarrow{l^k} \mu_{l^\infty} \to 0.$$

Соответствующая точная последовательность когомологий имеет вид

$$0 \to H^{i-1}(Z, \mu_{l^\infty})^{(l^k)} \to H^i(Z, \mu_{l^k, Z}) \to H^i(Z, \mu_{l^\infty})_{l^k} \to 0. \tag{3.4}$$

Здесь и далее для любой абелевой группы A через $A^{(n)}$ (соответственно A_n) мы обозначаем коядро (соответственно ядро) гомоморфизма умножения на $n: A \to A\ (a \mapsto na)$.

Переходя в точной последовательности (3.4) к проективному пределу по степеням l, получаем точную последовательность

$$0 \to H^{i-1}(Z, \mu_{l^\infty}) \underset{\mathbf{Z}_l}{\otimes} \mathbf{Q}_l / \mathbf{Z}_l \to H^i(Z, \mathbf{Z}_l(1)) \to T_l(H^i(Z, \mu_{l^\infty})) \to 0. \tag{3.5}$$

Так как группы $H^i(Z, \mu_{l^\infty})$ конечного типа (это следует из конечности групп $H^i(Z, \mu_{l^k})$ и точной последовательности (3.4)), они имеют вид

$$H^i(Z, \mu_{l^\infty}) = (\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^{\beta_i} \oplus t^i(Z; l),$$

где $t^i(Z; l)$ — конечные группы.

С другой стороны, из (3.5) следует, что

$$\mathbf{Q}_l^{b_i(Z;\, l)} = H^i(Z, \mathbf{Q}_l) \simeq H^i(Z, \mathbf{Z}_l(1)) \otimes \mathbf{Q}_l \simeq T_l(H^i(Z, \mu_{l^\infty})) \otimes \mathbf{Q}_l = \mathbf{Q}_l^{\beta_i}.$$

Отсюда $b_i(Z; l) = \beta_i$ и

$$H^i(Z, \mu_{l^\infty}) = (\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^{b_i(Z; l)} \oplus t^i(Z; l).$$

Применяя теперь (3.4) для $k=1$, получаем

$$\dim_{\mathbf{F}_l}(H^i(Z, \mu_{l,Z})) = b_i(Z; l) + \dim_{\mathbf{F}_l}(t^{i-1}(Z; l)^{(l)}) + \dim_{\mathbf{F}_l}(t^i(Z; l)_l).$$

Отсюда

$$\chi(Z, \mu_{l,Z}) = EP(Z) + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\dim_{\mathbf{F}_l}(t^i(Z; l)^{(l)}) - \dim_{\mathbf{F}_l}(t^i(Z; l)_l)].$$

Так как группы $t^i(Z; l)$ конечны, выражения стоящие в скобках равны нулю.

Заменяя в (3.3) $\chi(\quad, \mu_l)$ на $EP\ (\quad)$, получаем формулу из теоремы 1.1.

§ 4. Одно приложение

В этом параграфе через IS мы обозначаем класс проективных k-схем X таких, что все особые точки соответствующей приведенной схемы X_{red} изолированы.

Обозначим через $\mathbf{P}^r$ проективное пространство размерности r над k, через $\check{\mathbf{P}}^r$ двойственное проективное пространство гиперплоскостей $\mathbf{P}^r$. Прямая D в $\check{\mathbf{P}}^r$, рассматриваемая как замкнутая точка $\mathrm{Gr}(1, r)$, называется пучком гиперплоскостей в $\mathbf{P}^r$. Будем обозначать через H_t гиперплоскость, соответствующую точке $t \in D$. Пересечение двух гиперплоскостей $H_{t_1} \cdot H_{t_2}$ $(t_1 \neq t_2)$ будем называть осью пучка.

Определение. Пусть $i: X \hookrightarrow \mathbf{P}^r$ — некоторое проективное вложение схемы класса IS. Пучок $D \in \mathrm{Gr}(1, r)$ называется хорошим для вложения i, если

а) ось D пересекает X трансверсально (см. [5], ch. IV, 17.3),

б) существует открытое множество $U \subset D$ такое, что для всех $t \in U$ H_t пересекает трансверсально X,

в) для всех $t_0 \in D \setminus U$ H_{t_0} пересекает трансверсально X за исключением конечного числа точек.

В случае, когда X гладка и в условии в) H_{t_0} имеет только обычные двойные точки, определение хорошего пучка превращается в определение пучка Лефшеца в смысле доклада Катца ([18], exp. VII).

Вложение $i: X \to \mathbf{P}^r$ мы будем называть хорошим, если существует хороший пучок относительно i.

Пусть $Y \subset X \times \check{\mathbf{P}}^r$ — подсхема «инцинденций» $\check{\mathbf{P}}^r$-схемы $X \times \mathbf{P}^r$, слой которой в точке $H \in \check{\mathbf{P}}^r(k)$ есть $X \cdot H$. Эквивалентное определение состоит в том, что Y есть график рационального отображения $X \to \check{\mathbf{P}}^r$, определяемого полной линейной системой гиперплоских сечений X. Обозначим через $S(Y)$ подсхему точек особенностей (т. е. точек негладкости) морфизма $f: Y \to \check{\mathbf{P}}^r$, индуцированного проекцией $X \times \check{\mathbf{P}}^r \to \check{\mathbf{P}}^r$. Пусть $\check{X} = f(S(Y))$ — проекция $S(Y)$ на $\check{\mathbf{P}}^r$. В случае, когда X гладка, $\check{X}$ есть «двойственное к X» многообразие. Точки $S(Y)$ интерпретируются как пары (x, H), где x либо особа на X, либо H касается X в x (т. е. $H \cdot X$ особа в x).

Лемма 4.1. *Предположим, что морфизм $f: S(Y) \to \check{X}$ квазиконечен над каждой максимальной точкой $\check{X}$. Тогда вложение $X \hookrightarrow \mathbf{P}^r$ — хорошее.*

Доказательство. Пусть $F \subset \check{X}$ — подмножество точек $H \in \check{X}$ таких, что $\dim f^{-1}(H) > 0$. В силу теоремы Шевалле (см. [5], ch. IV, 13.1) это множество замкнуто в каждой неприводимой компоненте $\check{X}$. Так как $\dim \check{X} \leqslant r - 1$ (теорема Бертини для гиперплоских сечений [11]), имеем $\dim F \leqslant r - 2$. Заметим теперь, что пучок D из $\check{\mathbf{P}}^r$ является хорошим пучком в том и только том случае, когда

а) ось D пересекает трансверсально X,

б) D не содержится в $\check{X}$,

в) D не пересекает F.

Выберем точку $H \in \check{\mathbf{P}}^r$ вне $\check{X}$. Тогда $H \cdot X$ — гладкая подсхема X, вложенная в $H \simeq \mathbf{P}^{r-1}$, и $\dim \widecheck{H \cdot X} \leqslant r - 2$. Выберем прямую D, проходящую через H и не пересекающую $\widecheck{H \cdot X}$ и F. Это можно сделать, так как коразмерности многообразий $\widecheck{H \cdot X}$ и F не меньше 2 (см., например, [10], стр. 88). Очевидно, прямая D и будет искомым хорошим пучком.

Доказательство следующего предложения было предложено Ф. Заком.

Предложение 4.2. *Для любого вложения $i: X \subset \mathbf{P}^r$ схемы класса IS композиция $s_d \circ i: X \subset \mathbf{P}^r \subset \mathbf{P}^{\binom{r+d}{d}-1}$, где s_d — морфизм Сегре, $(d, p) = 1$, $d > 1$, является хорошим вложением.*

Доказательство. Пусть $\check{X}$ — двойственное к X многообразие относительно вложения $s_d \circ i$. Покажем, что для любой неособой точки $x_0 \in X$ существует точка $H \in \check{X}$ такая, что $H \cdot X$ имеет изолированную особенность в x_0. Отсюда будет следовать, что для любой неприводимой компоненты S_i схемы $S(Y)$ существует слой морфизма $f_i: S_i \to \check{X}$, состоящий из конечного числа точек. Отсюда получим, что морфизм f_i квазиконечен над общей точкой $f_i(S_i)$. После этого мы воспользуемся леммой 4.1. Выбрав подходящие однородные координаты $t_0, \ldots, t_r$ в $\mathbf{P}^r$, можно считать, что x_0 есть точка $(1, 0, \ldots, 0)$ и что функции t_i/t_0, $i = 1, \ldots, k$, суть локальные координаты на X в окрестности x_0. Рассмотрим гиперповерхность Γ с уравнением $t_1^d + \ldots + t_k^d = 0$. Очевидно, пересечение $\Gamma \cdot X$ есть пересечение $H \cdot X$, где H — соответствующая гиперплоскость в $\mathbf{P}^{\binom{r+d}{d}-1}$ и точка x_0 есть единственная особая точка $H \cdot X$. Предложение доказано.

Пусть теперь X — произвольная приведенная k-схема класса IS. В силу предыдущего предложения можно считать, что X хорошо погружено в $\mathbf{P}^r$. Выберем некоторый хороший пучок гиперплоских сечений на X, и пусть $\varphi: X \to \mathbf{P}^1$ — соответствующее рациональное отображение.

Предложение 4.3. *Предположим, что в случае $p > 0$ $\dim X \leqslant 3$. Существует коммутативная диаграмма рациональных отображений*

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{\pi}{\leftarrow} & X \\ & {\scriptstyle\varphi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f} & \\ & \mathbf{P}^1 & \end{array},$$

где π — бирациональный морфизм, являющийся композицией моноидальных преобразований с неособыми центрами, f — проективный морфизм со слоями класса IS, с геометрически связным гладким общим слоем.

Доказательство. Морфизм π есть ни что иное, как разрешение точек неопределенности рационального отображения, существование которого доказано Хиронакой [6] ($p=0$) и Абъянкаром [2] ($p>0$ и $\dim X \leqslant 3$). Очевидно, слои морфизма будут принадлежать классу IS и, кроме того, по определению хорошего пучка почти все слои f гладки, а следовательно, гладок и общий слой. Его геометрическая связность очевидна.

Предложение 4.4. *Пусть $\psi: X' \to X$ — моноидальное преобразование (с неособым центром Y коразмерности d) алгебраических k-схем. Предположим, что вложение $i: Y \subset X$ регулярно и схема нормальна. Тогда*

$$EP(X') = EP(X) + (d-1)EP(Y).$$

Доказательство. В силу регулярности вложения $i: Y \subset X$, структура схемы X' хорошо известна (см. [5], ch. IV, 19.4), а также [9], 12.2). Пусть $Y' = X' \times Y$, $g: Y' \to Y$ — ограничение морфизма ψ на Y'. Тогда а) ψ —

изоморфизм вне Y', б) g есть каноническая проекция $\mathbf{P}(N)\to Y$, где N — проективизация конормального расслоения к Y. В силу инвариантности эйлеровой характеристики в спектральной последовательности

$$E_2^{p,q}=H^p(X, R^q\psi_*\mu_{l,X'})\Rightarrow H^{p+q}(X', \mu_{l,X'}),$$

имеем

$$\chi(X', \mu_{l,X'})=\chi(X, \psi_*\mu_{l,X'})+\sum_{i=1}^{2d-2}(-1)^i\chi(X, R^i\psi_*\mu_{l,X'}).$$

Так как X нормальна, $\psi_*\mu_{l,X'}=\mu_{l,X}$ (ср. с доказательством следствия 1.6)), кроме того, пучки $R^i\psi_*\mu_{l,X'}$, $i>0$, сконцентрированы на Y и, в силу теоремы о замене базы, совпадают с пучками $R^ig_*\mu_{l,Y'}$. Отсюда

$$\chi(X', \mu_{l,X'})=\chi(X, \mu_{l,X})+\sum_{i=1}^{2d-2}(-1)^i\chi(Y, R^ig_*\mu_{l,Y'}). \tag{4.1}$$

Пучки $R^ig_*\mu_{l,Y'}$ легко вычисляются (см., например, [18]). Имеем

$$R^ig_*\mu_{l,Y'}=\begin{cases}(\mathbf{Z}/l)_Y, & i=2k\leqslant 2d-2,\\ 0, & i=2k+1<2d-2.\end{cases}$$

Отсюда, подставляя в (4.1), получаем

$$\chi(X', \mu_{l,X'})=\chi(X, \mu_{l,X})+(d-1)\chi(Y, (Z/l)_Y).$$

Остается воспользоваться леммой 3.1.

Теорема 4.5. *Пусть X — алгебраическая схема класса IS над полем k нулевой характеристики. Тогда $EP(X)$ не зависит от простого числа l.*

Доказательство. В силу [16] (exp. IX) можно считать, что X приведена. Будем рассуждать индукцией по $\dim X$. Для случая $\dim X=1$ утверждение следует из непосредственных вычислений (спектральная последовательность, примененная к морфизму нормализации, ср. [3], § 2). Применим к X предложение 4.3. Пусть

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] X \arrow[dr] & & X \arrow[ll] \arrow[dl] \\ & \mathbf{P}^1 & \end{tikzcd}$$

— диаграмма, существование которой утверждает предложение 4.3. В силу индуктивного предположения и предложения 4.4 достаточно доказать утверждение для схемы $\overline{X}$. Для того мы воспользуемся следствием 1.3 и снова предположением индукции. Теорема доказана.

Теорема 4.6. *Пусть X — схема класса IS над полем k характеристики $p>0$. Предположим, что $\dim X\leqslant 2$, тогда $EP(X)$ не зависит от простого числа l.*

Доказательство. Рассуждая, как в предыдущем доказательстве, мы сведем все к случаю поверхности $\overline{X}$, для которой существует собственный морфизм $f:\overline{X}\to\mathbf{P}^1$ с геометрически связным гладким общим слоем.

В силу теоремы 1.1 достаточно доказать, что инварианты высшего ветвления $\alpha_y(f;\, l)$ не зависят от l. Имеем, в силу следствия 1.6, $\alpha_y(f;\, l) = \delta_y(R^1 f_* \mu_{l,\bar{X}})$. Однако $\delta_y(R^1 f_* \mu_{l,\bar{X}}) = \delta(K_y, A(K_y)_l)$, где A — якобиан общего слоя f. Последний инвариант не зависит от простого числа l (в случае $\dim A = 1$ см. [13]; в общем случае см. [18], exp. IX).

§ 5. Кондуктор семейства алгебраических многообразий

В этом параграфе обозначения те же, что и в предыдущих параграфах. Пусть $f: X \to Y$ — собственный плоский морфизм схемы X на гладкую полную кривую Y с геометрически связным общим слоем X_η размерности n. Имеем (теорема 1.1)

$$EP(X) - EP(Y)\, EP(X_{\bar{\eta}}) = \sum_{y \in \bar{Y}} [EP(X_y) - EP(X_{\bar{\eta}}) + \alpha_y(f;\, l)]. \tag{5.1}$$

Правую часть этой формулы естественно представлять как некоторый инвариант вырождения морфизма f.

Определение. Назовем показателем кондуктора морфизма f в точке $y \in \bar{Y}$ число

$$c_y(f;\, l) = EP(X_y) - EP(X_{\bar{\eta}}) + \alpha_y(f;\, l).$$

Гипотеза 1. *$c_y(f;\, l)$ не зависит от простого числа $l \neq p$.*

Предложение 5.1. *Гипотеза 1 справедлива в следующих случаях:*

а) $p=0$;

б) *общий слой f является геометрически неприводимой алгебраической кривой.*

Доказательство. В случае а) утверждение очевидно, так как $\alpha_y(f;\, l) = 0$. В случае б) надо доказать, что $\alpha_y(f;\, l)$ не зависит от l. В силу условия на геометрическую неприводимость слоя f, имеем $R^2 f_* \mu_{l,X} = (\mathbf{Z}/l)_Y$, откуда $\alpha_y^2(f;\, l) = 0$. Тем самым остается доказать, что $\alpha_y^1(f;\, l) = \delta_y(R^1 f_* \mu_{l,X})$ не зависит от l для любой $y \in \bar{Y}$. Пусть J — обобщенный якобиан кривой $X_{\bar{\eta}}$ (или, что то же самое, связная компонента схемы Пикара $\mathbf{Pic}(X_{\bar{\eta}}/\overline{k(\eta)})$). Группа J является расширением абелевого многообразия A с помощью линейной коммутативной группы L. Последняя, в свою очередь, является прямым произведением тора $T \simeq \mathbf{G}_m^s$ на унипотентную группу U (см. [19]). Так как группа $U(\bar{K}_y)$ однозначно делима на l, имеем точную последовательность

$$0 \to (\mu_{l,\bar{K}_y})^s \to J(\bar{K}_y)_l \to A(\bar{K}_y)_l \to 0.$$

В силу аддитивности инварианта $\delta(K_y)$, получаем $\delta(K_y,\, J(\bar{K}_y)_l) = \delta(K_y,\, A(\bar{K}_y)_l)$. Последнее число не зависит от l в силу уже цитированного результата Гротендика (см. [18], exp. IX). Предложение доказано.

Определение. Назовем l-кондуктором морфизма f дивизор на Y

$$C(f;\, l) = \sum_{y \in \bar{Y}} c_y(f;\, l)\, y.$$

Гипотеза 1 влечет за собой независимость l-кондуктора от l, что позволило бы иметь хорошее определение кондуктора.

В любом случае, в силу формулы (5.1),

$$c(f) \overset{\mathrm{dfn}}{=} \deg C(f; l) = \sum_{y \in \overline{Y}} c_y(f; l) = EP(X) - EP(X_{\bar{\eta}}) EP(Y)$$

не зависит от l.

В случае, когда схема X гладка, а слои f приведены, можно дать инвариантную интерпретацию числа $c(f) = \deg C(f; l)$ через локальные инварианты особенностей морфизма f (см. [7]). Имеем

$$c(f) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+n-1} \dim_k \overline{\mathrm{E}}\mathrm{xt}^i (O_X, K.(f)), \tag{5.2}$$

где $K.(f)$ — некоторый комплекс пучков, ассоциированный с морфизмом f (см. loc. cit.). Если все слои морфизма f имеют только изолированные особенности, то формула (5.2) вырождается в следующую:

$$c(f) = (-1)^{n-1} \dim_k \mathrm{Hom}(O_X, K.(f)) = (-1)^{n-1} \dim_k H^0(X, O_X/\vartheta_{X/Y}), \tag{5.3}$$

где $\vartheta_{X/Y}$ — якобиев пучок морфизма f (или дифферента в смысле [4]). В случае, когда $\dim X = 2$, формула (5.3) была доказана в [4].

Следующая гипотеза связана с вопросом «локализации» формулы (5.2).

Гипотеза 2. *Пусть* $\widetilde{X}_y = X \underset{Y}{\otimes} O_{Y,y}$, $i : \widetilde{X}_y \hookrightarrow X$ — *каноническое вложение. Тогда, если* X *гладка, а слои* f *приведены, то*

$$c_y(f; l) = \sum_{i=0} (-1)^{i+n-1} \dim_k \overline{\mathrm{E}}\mathrm{xt}^i (O_{\widetilde{X}_y}, i^*(K.(f))).$$

Она выполняется в случае, когда $\dim X = 2$ и $p = 0$ (см. [7]). Неявное доказательство этого факта можно найти также у Юнга ([8], гл. VI).

Гипотеза 3. *Инварианты* $\alpha_y^i(f; l) = \delta_y(R^i f_* \mu_{l,X})$ *не зависят от простого* $l \neq p$. *В частности, от* l *не зависят инварианты* $\alpha_y(f; l)$, $c_y(f; l)$.

Предположим далее, что общий слой f гладок, в силу следствия 1.6 достаточно доказывать эту гипотезу только для значений $1 \leqslant i \leqslant n$, где $n = \dim X_\eta$. Кроме того, как и при доказательстве предложения 5.1 (случай б)); можно считать, что $i > 1$. В частности, если $\dim X = 3$, то остается проверить инвариантность $\alpha_y^2(f; l)$.

В общем случае, легко доказать, что предыдущая гипотеза следует из гипотезы Серра — Тейта об l-адических представлениях (см. [21], Appendix).

Пусть $\tilde{\eta}_y$ — общая точка схемы $\mathrm{Spec}(O_{Y,y}^h)$ и $X_{\bar{\tilde{\eta}}_y}$ — геометрический общий слой соответствующего морфизма $\tilde{f}_y : X \underset{Y}{\otimes} O_{Y,y}^h \to \mathrm{Spec}(O_{Y,y}^h)$. Группа Галуа

G_y поля $K_y = k(\tilde{\eta}_y)$ действует на рациональных l-адических когомологиях $H_l^i(y) = H^i(X_{\tilde{\eta}_y}, \mathbf{Q}_l)$. Пусть $\varepsilon_y^i(X_\eta; l)$ — коразмерность инвариантов $H_l^i(y)^{G_y}$ и

$$\varepsilon_y(X_\eta; l) = \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^i \varepsilon_y^i (X_\eta; l).$$

Следуя Серру — Тейту, можно было бы определить показатель кондуктора (соответственно кондуктор) в точке y общего слоя X_η морфизма f, положив

$$\bar{c}_y(X_\eta; l) = \varepsilon_y(X_\eta; l) + \alpha_y(f; l)$$

$$\left(\text{соответственно } \bar{C}(X_\eta; l) = \sum_{y \in \bar{Y}} \bar{c}_y(X_\eta; l)\, y\right).$$

Гипотеза 4. *Предположим, что Y-схема X является Y-нероновой в смысле Рейно* [14]. *Тогда*

$$\bar{c}_y(X_\eta; l) = -c_y(f; l) + b_{2n}(X_y) - 1.$$

Заметим, что эта гипотеза выполняется в случае гладкой алгебраической поверхности X.

Предположим далее, что все особые точки слоев морфизма f изолированы и схема X гладка. Пусть x — замкнутая точка X, $y = f(x)$. Рассмотрим канонический морфизм $f_x : \operatorname{Spec}(O_{X,x}^h) \to \operatorname{Spec}(O_{Y,y}^h)$, индуцированный естественным вложением $O_{Y,y}^h \subset O_{X,x}^h$. Обозначим через $X(x)$ K_y-схему $\operatorname{Spec}(O_{X,x}^h \otimes_{O_{Y,y}^h} K_y)$, и пусть $\bar{X}(x) = X(x) \otimes_{K_y} \bar{K}_y$ — геометрический общий слой морфизма f_x. Группа Галуа $G_y = \operatorname{Gal}(\bar{K}_y/K_y)$ действует на $\bar{X}(x)$ естественным образом. Тем самым определено представление

$$\rho_x^i : G_y \to \operatorname{Aut}_{\mathbf{F}_l}(H^i(\bar{X}(x), \mu_{l,\bar{X}(x)})),$$

которое мы будем называть **локальной монодромией** в точке x. Это представление является алгебраическим аналогом локальной монодромии Пикара — Лефшеца, изучаемой в [25], [26].

Предложение 5.2. а) $H^i(\bar{X}(x), \mu_{l,\bar{X}(x)}) = 0, i > n$.

б) *Пространства $H^i(\bar{X}(x), \mu_{l,\bar{X}(x)})$ конечномерны над полем $\mathbf{F}_l$.*

в) *Если морфизм f гладок в точке x, то $H^i(\bar{X}(x), \mu_{l,\bar{X}(x)}) = 0, i > 0$.*

Доказательство. Докажем сначала в). Так как морфизм f гладок в точке x, то существует открытое множество U, содержащее x, и накрывающий Y-морфизм $U \to Y[T_1, \ldots, T_n]$, где $n = \dim X_\eta$ и $Y[T_1, \ldots, T_n] = Y \otimes_{\mathbf{Z}} \operatorname{Spec}(\mathbf{Z}[T_1, \ldots, T_n])$ (см. [5], ch. IV, 17.11.4). Отсюда, очевидно, следует, что схема $X(x)$ — изоморфна локальной гензелевой схеме $\operatorname{Spec}(K_y\{T_1, \ldots, T_n\})$, где $K_y\{T_1, \ldots, T_n\}$ — гензелизация локализации кольца многочленов $K_y[T_1, \ldots, T_n]$ в точке $(0, \ldots, 0)$. Таким образом, схема $\overline{X}(x) = \mathrm{Spec}\,(\overline{K}_y\{T_1, \ldots, T_n\})$ — строго гензелева, а следовательно, $H^i(\overline{X}(x), \mu_{l,\overline{X}(x)}) = 0, i > 0$.

Докажем теперь утверждение б). Пусть $\widetilde{X}_y = X \underset{Y}{\otimes} O^h_{Y,y} \to \mathrm{Spec}\,(O^h_{Y,y})$ — канонический морфизм замены базы и $\overline{X}_{\widetilde{\eta}_y} = \widetilde{X}_y \underset{O^h_{Y,y}}{\otimes} \overline{K}_y$ — его геометрический общий слой. Рассмотрим канонический морфизм $i: \overline{X}_{\widetilde{\eta}_y} \to \widetilde{X}_y$, являющийся композицией канонических морфизмов проекций $\overline{X}_{\widetilde{\eta}_y} \to \widetilde{X}_y \underset{O^h_{Y,y}}{\otimes} K_y \to \widetilde{X}_y$. Пусть

$$E_2^{p,q} = H^p(\widetilde{X}_y, R^q i_* \mu_{l,\overline{X}_{\widetilde{\eta}_y}}) \Rightarrow H^{p+q}(\overline{X}_{\widetilde{\eta}_y}, \mu_l) \tag{5.4}$$

— спектральная последовательность Лере для морфизма i и пучка $\mu_{l,\overline{X}_{\widetilde{\eta}_y}}$. Для любой замкнутой точки $x \in X_y$ имеем ([16], exp. VIII)

$$(R^q i_* \mu_{l,\overline{X}_{\widetilde{\eta}_y}})_x = H^q(\overline{X}(x), \mu_{l,\overline{X}(x)}).$$

В силу в) отсюда следует, что пучки $R^q i_* \mu_{l,\overline{X}_{\widetilde{\eta}_y}}$, $q > 0$, сосредоточены в особых точках слоя X_y. Тем самым в спектральной последовательности (5.4) члены $E_2^{p,q}$ с $p > 0$, $q > 0$ равны нулю. Так как члены $E_2^{p,0}$ конечномерны над $\mathbf{F}_l$ и пределы H^{p+q} также конечномерны, то отсюда следует конечномерность членов $E^{0,q}$.

Утверждение а) следует из того, что $\overline{X}(x)$ — аффинная схема размерности n ([16], exp. XIV). Предложение доказано.

Определение. Положим

$$b_x(f; l) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \dim_{\mathbf{F}_l}(H^i(\overline{X}(x), \mu_{l,\overline{X}(x)})),$$

$$\sigma_x(f; l) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \delta(K_y, H^i(\overline{X}(x), \mu_{l,\overline{X}(x)})).$$

Предложение 5.3. *В предположениях, указанных выше,*

$$EP(X_y) - EP(X_{\overline{\eta}}) = \sum_{x \in X_y(k)} b_x(f; l), \quad \alpha_y(f; l) = \sum_{x \in X_y(k)} \sigma_x(f; l).$$

В частности, $c_y(f; l) = \sum\limits_{x \in X_y(k)} (b_x(f; l) + \sigma_x(f; l))$.

Доказательство. Как мы видели при доказательстве предложения 5.2,

$$R^q i_* \mu_{l,\overline{X}_{\widetilde{\eta}_y}} = \bigoplus_{x \in X_y(k)} H^q(\overline{X}(x), \mu_{l,\overline{X}(x)})$$

является постоянным пучком, сосредоточенным в особых точках слоя X_y. В силу спектральной последовательности (5.4), имеем отсюда

$$\chi(\overline{X}_{\widetilde{\eta}_y}, \mu_l) = \chi(\widetilde{X}_y, i_*\mu_{l,\overline{X}_{\widetilde{\eta}_y}}) - \sum_{x \in X_y(k)} b_x(f; l).$$

Так как схемы $\overline{X}(x)$ связны, $i_*\mu_{l,\overline{X}_{\widetilde{\eta}_y}} = \mu_{l,\widetilde{X}_y}$. Отсюда, в силу теоремы о замене базы, имеем $\chi(\widetilde{X}_y, i_*\mu_{l,\overline{X}_{\widetilde{\eta}_y}}) = \chi(X_y, \mu_l)$ и $\chi(\overline{X}_{\widetilde{\eta}_y}, \mu_{l,\overline{X}_{\widetilde{\eta}_y}}) = \chi(X_{\overline{\eta}}, \mu_{l,X_{\overline{\eta}}})$. Применяя лемму 3.1, получаем равенство

$$EP(X_y) - EP(X_{\overline{\eta}}) = \sum_{x \in X_y(k)} b_x(f; l).$$

Легко видеть, что благодаря действию группы G_y на пучках $R^q i_*\mu_{l,\overline{X}_{\widetilde{\eta}_y}}$ спектральная последовательность (5.4) является спектральной последовательностью G_y-модулей (ср. [24], стр. 226). В силу инвариантности аддитивной функции $\delta(K_y,)$ в спектральной последовательности, получаем

$$a_y(f; l) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \delta(K_y, H^i(\overline{X}_{\widetilde{\eta}_y}, \mu_l)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \delta(K_y, H^i(\widetilde{X}_y, \mu_l)) - \sum_{x \in X_y(k)} \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \delta(K_y, H^i(\overline{X}(x), \mu_l)).$$

Так как G_y действует тождественно на $H^i(\widetilde{X}_y, \mu_l)$, получаем нужное нам равенство

$$\alpha_y(f; l) = \sum_{x \in X_y(k)} \sigma_x(f; l).$$

Предложение доказано.

Гипотеза 5*). *Для любой замкнутой точки* $x \in X_y(k)$

$$b_x(f; l) + \sigma_x(f; l) = (-1)^{n-1} \dim_k (O_{X,x}/\vartheta_{X/Y,x}),$$

где $\vartheta_{X/Y}$ — *якобиев пучок морфизма* f (ср. (5.3)).

Замечания. 1. Очевидно, что в случае, когда все особые точки слоя X_y изолированы, гипотеза 3 следует из гипотезы 5 (ср. (5.3)).

2. Гипотеза 5 является алгебраическим аналогом теоремы Милнора (см. [25], а также [26], Appendix). Эта теорема подсказывает также гипотезу, что группы $H^i(\overline{X}(x), \mu_l)$ равны нулю для $i \neq 0, n$.

3. Аналогично локальной монодромии $\rho_x^i: G_y \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{F}_l}(H^i(\overline{X}(x), \mu_l))$ можно рассмотреть l-адическое представление $\widetilde{\rho}_x^i: G_y \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{Z}_l}(H^i(\overline{X}(x), \mathbf{Z}_l))$ и сформулировать для $\widetilde{\rho}_x^i$ аналоги гипотез Серра — Тейта (см. [21], Appendix). Из справедливости этих гипотез следовало бы, например, что числа $\delta_y(f; l)$ не зависят от l.

(Поступила в редакцию 12/X 1971 г.)

* Гипотеза 5 была доказана П. Делинем (будет опубликовано в SGA, 7).

Литература

1. Алгебраические поверхности (под ред. И. Р. Шафаревича), Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **75** (1965).
2. S. Abhyankar, On the problem of resolution of singularities, ICM, Москва, 1966, 467—479.
3. I. Dolgačev, On the purity of the degeneration loci of families of curves, Invent. Math., **8** (1969), 34—54.
4. И. В. Долгачев, А. Н. Паршин, Дифферента и дискриминант регулярных отображений, Матем. заметки, **4**, № **5** (1968), 519—523.
5. A. Grothendieck, Elements de Géometrie Algébrique, Publ. Math. IHES, Paris, № **17**, **24**, **28**, **32** (1962—1966).
6. H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety, Ann. Math., **79**, № **1** (1964), 109—326.
7. B. Iversen, On critical values of an algebraic function, Invent. Math., **12** (1971), 210—224.
8. H. Jung, Algebraische Flächen, Hannover, 1925.
9. Ю. И. Манин, Лекции о *K*-функторе в алгебраической геометрии, Успехи матем. наук, **XXIV**, вып. **5** (**149**) (1969), 3—86.
10. D. Mumford, Introduction into algebraic geometry, Harvard Univ. (preprint), 1969.
11. Y. Nakai, Note on the intersection of an algebraic variety with the generic hyperplane, Mem. Coll. sci. Univ. Kyoto, **26**, № **2** (1950), 185—187.
12. A. Ogg, Cohomology of abelian varieties over function fields, Ann. Math., **76**, № 2 (1962), 185—212.
13. A. Ogg, Elliptic curves and wild ramification, Amer. J. Math., **89**, № **1** (1967), 1—21.
14. M. Raynaud, Models de Neron, C. r. Acad sci., Paris, **262** (1966), 413—416.
15. M. Raynaud, Caracteristique d'Euler — Poincare d'un faisceau et cohomologie des varietés abéliennes «Dix exsposés sur la cohomologie des schémas», North-Holland, Amsterdam, 1968, 12—31.
16. Séminaire de Géometric Algébrique, **4** (1964—65) (SGA 4), IHES, Paris, (mimeo. notes).
17. Séminaire de Géometric Algébrique, **5** (1964 — 65) (SGA 5), IHES, Paris (mimeo. notes).
18. Séminaire de Géometrie Algébrique, **7** (1968—1970), (SGA 7), IHES, Paris (preprint).
19. Ж.-П. Серр, Алгебраические группы и поля классов, Москва, изд-во «Мир», 1967.
20. J.-P. Serre, Corps locaux, Harmann, Paris, 1962.
21. J.-P. Serre, J. Tate, Good reduction of abelian varieties, Ann. Math., 88, № **2** (1968), 492—517.
22. J.-L. Verdier, A duality theorem in the etale cohomology, «Local fields», Diebergen, 1966, 184—198.
23. И. Р. Шафаревич, Главные однородные пространства над функциональными полями, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **64** (1961), 316—346.
24. Ф. Гриффитс, Доклад о вариации структуры Ходжа, Успехи матем. наук, **XXV**, вып. 3 (**153**) (1970), 175—234.
25. Дж. Милнор, Особые точки комплексных гиперповерхностей, Москва, изд-во «Мир», 1971.
26. E. Brieskorn. Die Monodromie die isolierten Singularitäten von Hyperflächen, Manuscr. Math., **2** (1970), 103—161.