МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 4, № 5 (1968), 519—523

УДК 513.83

ДИФФЕРЕНТА И ДИСКРИМИНАНТ РЕГУЛЯРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

И. В. Долгачев, А. Н. Паршин

Изучается дифферента морфизмов поверхностей на кривые. Устанавливается связь между дискриминантом и эйлеровыми характеристиками вырожденных слоев для морфизмов без кратных компонент. Библ. 6 назв.

1. Пусть $f: X \to Y$ — собственный морфизм схем над полем k. Естественный вопрос о степени его гладкости может быть решен, как и в случае конечного морфизма, с помощью подходящего аналога дифференты и дискриминанта. Соответствующие определения были даны в лекциях И. Р. Шафаревича в 1961 г. (их историю и мотивировку см. в [6]). Пусть $\mathcal{O}$ — локальное кольцо без делителей нуля, M — $\mathcal{O}$-модуль конечного типа, K — поле частных $\mathcal{O}$. Если $0 \to N \to \mathcal{O}^n \to M \to 0$ и $\dim M \otimes_{\mathcal{O}} K = m$, то положим

$$\vartheta(M) = \bigcup_{S_m} \Lambda^n (N + S_m),$$

где S_m пробегает подмодули $\mathcal{O}^n$, имеющие m образующих, а Λ^n есть n-я внешняя степень. Идеал $\vartheta(M)$ кольца $\mathcal{O}$ оказывается инвариантно определенным и называется *дифферентой* модуля M. Используя проективную резольвенту, можно дать аналогичное определение для любых целостных колец. Основные свойства:

1) $\vartheta(M) = (1) \Leftrightarrow M$ проективен;

2) $\vartheta(M \oplus M') = \vartheta(M)\, \vartheta(M')$;

3) если $p \subset \mathcal{O}$ — простой идеал, $\mathcal{O}_p$, M_p — локализации, то

$$\vartheta(M_p) = \vartheta(M)\, \mathcal{O}_p.$$

Если теперь дан когерентный пучок на схеме X, то свойство 3) дает возможность определить дифференту $\vartheta(F)$ пучка F так, чтобы $\vartheta(F)_x = \vartheta(F_x)$, $x \in X$. $\vartheta(F)$ является пучком идеалов на X. Возвращаясь к морфизму $f: X \to Y$, положим $\vartheta_{X|Y} = \vartheta(\Omega^1_{X|Y})$, где $\Omega^1_{X|Y}$ — пучок относительных дифференциалов (см. [3]). *Дискриминантом отображения* f назовем пучок $D_{X|Y} = \mathcal{O}_X / \vartheta$ на X. Если Y — гладкая неприводимая схема размерности 1 и общий слой морфизма f гладок, пучок $f_* D_{X|Y}$ есть не что иное, как $\bigoplus_{y \in Y} \mathcal{O}_{Y,y} | m_y^{n_y}$, m_y — максимальные идеалы точек Y. Число Σn_y мы будем также называть *дискриминантом морфизма* f и обозначать через $d_{X|Y}$.

ЛЕММА 1. *Предположим, что схема Y гладка над k, схема X целостная, морфизм f гладок в общей точке X. Тогда имеем точную последовательность пучков на X*

$$0 \to f^*\Omega^1_Y \to \Omega^1_X \to \Omega^1_{X|Y} \to 0. \tag{1}$$

Доказательство. Для любого морфизма точна последовательность

$$f^*\Omega^1_Y \to \Omega^1_X \to \Omega^1_{X|Y} \to 0$$

(см. [3]). Согласно дифференциальному критерию гладкости А. Гротендика [3], морфизм f гладок в точке $x \in X$, если точна последовательность

$$0 \to (f^*\Omega^1_Y)_x \to (\Omega^1_X)_x \to (\Omega^1_{X|Y})_x \to 0$$

и модуль $(\Omega^1_{X|Y})_x$ проективен. Условия леммы показывают, что пучок $f^*\Omega^1_Y$ локально свободен и ядро гомоморфизма $f^*\Omega^1_Y \to \Omega^1_X$ является пучком кручения. Поскольку локально свободный пучок не содержит подпучка кручения, получаем то, что требуется.

Следствие. *В условиях леммы* $\operatorname{supp}(D_{X|Y})$ *совпадает с множеством точек X, в которых морфизм f негладок. В частности, если все слои f имеют одинаковую размерность, то это множество является объединением особых точек слоев f.*

2. Предположим теперь, что X — гладкая алгебраическая поверхность, Y — гладкая алгебраическая кривая рода q, общий слой морфизма f — гладкая кривая рода g

над полем функций на Y, морфизм f и схемы X, Y определены над алгебраически замкнутым полем k. Предположим, кроме того, что слои f не имеют кратных компонент.

ЛЕММА 2. *В этих условиях имеем точную последовательность пучков на* X

$$0 \to \Omega^1_{X|Y} \otimes f^*\omega_Y \xrightarrow{\alpha} \omega_X \to D_{X|Y} \to 0, \tag{2}$$

где $\omega_X = \Omega^2_{X|k}$, $\omega_Y = \Omega^1_{Y|k}$ — *канонические пучки* X и Y *соответственно.*

Доказательство. Пусть $a : f^*\Omega^1_Y \hookrightarrow \Omega^1_X$ — каноническое вложение, определяемое точной последовательностью (1). Умножая его тензорно на пучок Ω^1_X, получим

$$a' : f^*\Omega^1_Y \otimes \Omega^1_X \hookrightarrow \Omega^1_X \otimes \Omega^1_X.$$

Композиция a' с отображением внешней степени

$$\Lambda : \Omega^1_X \otimes \Omega^1_X \to \Omega^2_{X|k} = \omega_X$$

определяет гомоморфизм

$$\alpha' : \Omega^1_X \otimes f^*\omega_Y \to \omega_X.$$

Так как пучок $f^*\omega_Y$ обратим, то легко видеть, что

$$f^*\omega_Y \otimes f^*\omega_Y \subset \ker \alpha'.$$

Применяя точную последовательность (1), получаем гомоморфизм

$$\alpha : \Omega^1_{X|Y} \otimes f^*\omega_Y \to \omega_X.$$

Пусть $Z = \operatorname{supp}\,(D_{X|Y})$. Предположение о морфизме f показывает, что $\operatorname{codim} Z \geqslant 2$; с другой стороны, α — изоморфизм на $X - Z$. Это показывает, что $\operatorname{supp}\,(\ker \alpha) \subset Z$. Но точная последовательность (1) влечет

$$\mathrm{dp}\,\Omega^1_{X|Y} \leqslant 1,$$

и, следовательно,

$$\operatorname{depth}_Z \Omega^1_{X|Y} \geqslant 1$$

(X — регулярная схема), откуда следует, что $\ker \alpha = 0$.

Из определения $\vartheta_{X|Y}$ легко извлечь, что

$$\operatorname{Im}\alpha = \vartheta_{X|Y} \otimes \omega_X,$$

и, поскольку $\operatorname{codim} Z \geqslant 2$,

$$\operatorname{coker}\alpha = \omega_X / \vartheta_{X|Y} \otimes \omega_X = D_{X|Y} \otimes \omega_X = D_{X|Y}.$$

Следствие.

1) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X|Y}, \mathcal{O}_X) \simeq \omega_X^{-1} \otimes f^*\omega_Y$;

2) $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X|Y}, \mathcal{O}_X) = D_{X|Y}$;

3) $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X|Y}, \mathcal{O}_X) = 0, \quad i > 1.$

Доказательство. Так как регулярное кольцо— кольцо Горенштейна, то (см. [1])

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(D_{X|Y}, \mathcal{O}_X) = \begin{cases} 0, & i \neq 2, \\ D_{X|Y}, & i = 2. \end{cases}$$

Остается применить функтор $\mathrm{Hom}\,(.,\ \mathcal{O}_X)$ к последовательности (2).

Замечание. Соотношение 2) выполнено и при наличии кратных компонент. В этом случае пучок $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X|Y}, \mathcal{O}_X)$ будет также локально свободным, а именно он равен

$$\omega_X^{-1} \otimes f^*\omega_Y \otimes \mathcal{O}_X(D), \text{ где } D = \sum_{y\in Y} X_y - (X_y)_{\mathrm{red}}.$$

Следующая теорема была высказана в качестве гипотезы И. Р. Шафаревичем.

ТЕОРЕМА.

$$d_{X|Y} = \sum_{y\in Y} \chi(X_y) - \chi(F),$$

где F — общий слой морфизма f, χ есть l-адическая накрывающая характеристика Эйлера—Пуанкаре $(l, \operatorname{char} k) = 1$.

Доказательство. Из (1) получаем точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X|Y}, \mathcal{O}_X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X) \to$$

$$\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\omega_Y, \mathcal{O}_X) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X|Y}, \mathcal{O}_X) \to 0.$$

Пользуясь следствием из леммы 2, эту последовательность можно переписать так:

$$0 \to \omega_X^{-1} \otimes f^*\omega_Y \to T_X \to f^*T_Y \to D_{X|Y} \to 0, \qquad (3)$$

где T_Z — касательный пучок схемы Z. Легко видеть, что

$$c_2(D_{X|Y}) = d_{X|Y},$$

где c_2 — второй класс Чженя пучка $D_{X|Y}$. Применяя свойства характера Чженя $\mathrm{ch}(F)$ пучка F (см. [2]), получаем

$$\mathrm{ch}(\omega_X^{-1} \otimes f^*\omega_Y) = 1 + f^*c_1(Y) - c_1(X) + \frac{1}{2}c_1(X)^2 - \\ -(2-2g)(2-2q),$$

$$\mathrm{ch}(T_X) = 2 - c_1(X) + \frac{1}{2}c_1(X)^2 - c_2(X),$$

$$\mathrm{ch}(f^*T_Y) = 1 - f^*c_1(Y),$$
$$\mathrm{ch}(D_{X|Y}) = d_{X|Y}.$$

Аддитивность ch и последовательность (3) дают

$$d_{X|Y} = c_2(X) - (2-2g)(2-2q).$$

Остается воспользоваться формулой

$$\chi(X) = \chi(F)\cdot\chi(Y) + \sum\nolimits'_{y\in Y}\chi(X_y) - \chi(F)$$

и формулой

$$c_2(X) = \chi(X),$$

следующей из теоремы Лефшеца о неподвижных точках морфизмов (см. [4]).

Замечания. 1. Если $k = \mathbf{C}$, то, в силу теоремы сравнения и вычисления эйлеровой характеристики для произвольных кривых, аналогичная теорема имеет место с заменой χ на обычную топологическую эйлерову характеристику.

2. Легко видеть, что пучок $\vartheta_{X|Y}$ есть в точности якобиев пучок Хиронаки, играющий важную роль в определении равноособости морфизма схем (см. [5]).

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
18. I. 68

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] B a s s, H., On the ubiquity of gorenstein rings, Math. Z., 82 (1963), 8—28.

[2] Б о р е л ь А., С е р р Ж. П., Теорема Римана — Роха, Математика, 5, № 5 (1961), 17—54.

[3] G r o t h e n d i e c k A., D i e u d o n n e J., Elements de géometrie algébrique, ch. IV, Publ. Math. IHES, n° 32, 28, 24, 20.

[4] G r o t h e n d i e c k A., Cohomologie l-adique et fonctions L, Seminaire IHES, 1964/1965.

[5] H i r o n a k a H., Equivalences and deformations of isolated singularities, Summer School, Woodshole, 1964.

[6] Ш а ф а р е в и ч И. Р., Поля алгебраических чисел, Proc. Int. Congr. Math., Stockholm, 1962, 163—176.