

Problem # 5.

a) We notice that

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Hence

$$T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{4} T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) + \frac{1}{4} T \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix}.$$

b) We notice that

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

from which

$$T^{-1} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = T^{-1} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + T^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Answer: a) $\begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$.