Optique géométrique résonnante et tissus*

Jean-Luc JOLY
MAB, Université Bordeaux I
33405 Talence, FRANCE

Guy MÉTIVIER
IRMAR, Université Rennes I
35042 Rennes, FRANCE

Jeffrey RAUCH
Department of Mathematics, University of Michigan
Ann Arbor 48109 MI, USA

L'optique géométrique est une appproximation de l'optique ondulatoire de Maxwell. L'optique ondulatoire traîte des oscillations électromagnétiques de toutes longueurs d'onde: des plus courtes comme les rayons γ émis par les substances radio-actives ($10^{-7}m$) jusqu'aux ondes radio dites longues (10^3m) en passant par les rayons X, l'ultra-violet, la lumière visible et l'infra-rouge. L'optique géométrique est une approximation qui ignore le caractère ondulatoire du rayonnement électromagnétique et pour laquelle la propagation s'effectue le long de "rayons". Cette approximation est valide lorsque la longueur d'onde du rayonnement étudié est négligeable devant les dimensions caractéristiques de la géométrie de l'expérience. C'est une approximation haute fréquence.

On doit à Luneburg [Lu] d'avoir posé le problème de cette approximation en terme de solutions approchées du système de Maxwell, données par des séries asymptotiques faisant intervenir un petit paramètre. C'est à Lax qu'on doit les premiers résultats mathématiques [La], qui sont à la base de la théorie moderne des équations aux dérivées partielles hyperboliques.

Il faut décrire brièvement la méthode de Lax-Luneburg, c'est à dire la méthode de l'optique géométrique linéaire, pour comprendre ensuite les effets non linéaires.

On se donne un système d'équations aux dérivées partielles

$$L := \partial_t + \sum_{1\le j\le d} A_j(t,x)\,\partial_{x_j}, \tag{1}$$

où t désigne le temps et x_j, $j = 1, \ldots, d$ les coordonnées de l'espace. On suppose que ce système est hyperbolique symétrique, c'est à dire que les matrices A_j sont symétriques. On cherche des solutions approchées de l'équation

$$Lv^\varepsilon = g^\varepsilon \tag{2}$$

* Research partially supported by the U.S. National Science Foundation, U.S. Office of Naval Research, and the NSF-CNRS cooperation program under grants number NSF-DMS-9203413 and OD-G-N0014-92-J-1245 NSF-INT-9314095 respectively, and the CNRS through the Groupe de Recherche G1180 POAN.

de la forme

$$u^\varepsilon(t,x) \sim \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon^k\, a_k(t,x)\, e^{i\,\varphi(t,x)/\varepsilon}, \tag{3}$$

c'est àdire oscillant sur la phase φ avec une fréquence de l'ordre de $1/\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ etant un petit paramètre. Le terme de source est supposé de la même forme

$$g^\varepsilon(t,x) \sim \sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon^k\, b_k(t,x)\, e^{i\,\varphi(t,x)/\varepsilon}.$$

Introduisons le symbole

$$A(t,x,\xi) := \sum_{1\le j\le d} \xi_j\, A_j(t,x). \tag{4}$$

Cette matrice symétrique se diagonalise

$$A(t,x,\xi) = \sum_{\ell} \lambda_\ell(t,x,\xi)\, \Pi_\ell(t,x,\xi). \tag{5}$$

Sous une hypothèse de multiplicité constante, les valeurs propres λ sont des fonctions réelles C^∞ en dehors de $\xi = 0$. De même les projecteurs spectraux sont C^∞ en dehors de $\xi = 0$ à valeurs dans les matrices symétriques.

La construction d'une solution approchée est différente selon que la phase φ est *caractéristique* ou non pour l'opérateur L, c'est à dire selon que la matrice

$$L(d\varphi) = \partial_t\varphi + A(t,x,\partial_x\varphi) \tag{6}$$

est singulière ou non. Les deux termes de cette alternative interviennent de façon fondamentale en optique géométrique non linéaire pour décrire la résonance de phase.

Cherchons à résoudre le problème simplifié

$$L(\partial)\Big((a_0 + \varepsilon a_1)\, e^{i\,\varphi/\varepsilon}\Big) = b_0\, e^{i\,\varphi/\varepsilon}. \tag{7}$$

En ordonnant le membre de gauche de (7) selon les puissances croissantes de ε, il vient après multiplication par $e^{-i\,\varphi/\varepsilon}$,

$$\frac{1}{\varepsilon} L(id\varphi)\, a_0 + L(id\varphi)\, a_1 + L(\partial)\, a_0 = b_0 \tag*{(8).}$$

On annule les coefficients des puissances de ε. Comme on l'a dit on distingue deux cas. Dans le premier la matrice $L(id\varphi)$ est inversible en tout point d'un ouvert ω. On obtient donc en tout point de ω

$$a_0 = 0\,, \quad a_1 = L(d\varphi)^{-1}\, b_0.$$

On a affaire à une inversion elliptique, notant que la solution approchée est d'amplitude de l'ordre de ε.

Dans le second cas, $\det(L(id\varphi))$ est identiquement nulle dans ω, c'est à dire que la phase φ, supposée telle que $d\varphi \neq 0$, satisfait dans ω une (et une seule, à cause de l'hypothèse de multiplicité constante) des équations eikonales

$$\partial_t \varphi + \lambda(t, x, \partial_x \varphi) = 0,$$

λ désignant une des valeurs propres λ_ℓ dans (5). L'amplitude a_0 n'est donc plus nécessairement nulle comme dans le cas précédent, mais doit vérifier la condition de polarisation

$$a_0 = \Pi(id\varphi)\, a_0, \tag{9}$$

Π désignant le projecteur associé à λ. L'annulation du coefficient de ε^0 conduit à

$$L(id\varphi)\, a_1 + L(\partial)\, a_0 = b_0. \tag{10}$$

On en tire l'information: $L(\partial)\, a_0 - b_0 \in \operatorname{Im} L(id\varphi)$ qui équivaut à la condition de résolubilité

$$\Pi(id\varphi)\, L(\partial)\, a_0 = \Pi(id\varphi)\, b_0.$$

Ainsi, sans chercher à résoudre (10) pour trouver a_1, on a obtenu une deuxième équation pour a_0, qui, compte tenu de (9), s'écrit

$$\Pi(id\varphi)\, L(\partial)\, \Pi(id\varphi) a_0 = \Pi(id\varphi)\, b_0. \tag{11}$$

Cette équation fait intervenir un nouvel opérateur différentiel qui est hyperbolique symétrique sur le fibré des fonctions vérifiant $\Pi(id\varphi)\, a = a$. On montre que ce système est un opérateur scalaire du premier ordre – le champ de vecteur qui définit les "rayons" mentionnés plus haut – dont le symbole principal

$$\partial_t + \lambda'_\xi(t, x, d\varphi(t, x))(\partial_x)$$

introduit la "vitesse de groupe" $\partial_\xi \lambda(d\varphi)$ et dont la variété caractéristique est le fibré tangent à la variété caractéristique de $L(\partial)$ en $d\varphi$. Le problème de Cauchy correspondant est bien posé en C^∞ et permet de définir $a_0 = \Pi(id\varphi)\, a_0$ étant donné $a_{0|t=0} = \Pi(id\varphi)\, a_{0|t=0}$.

En résumé, l'inversion de

$$Lv^\varepsilon = b_0\, e^{i\varphi/\varepsilon} \tag{12}$$

présente l'alternative suivante:

1) Si la phase φ dans le terme de source est non caractéristique, la réponse

$$v^\varepsilon \sim \varepsilon a_1\, e^{i\varphi/\varepsilon}, \quad \det(L(i\, d\varphi)) \neq 0, \tag{13}$$

a une amplitude de l'ordre de ε et peut donc être négligée dans le terme principal.

2) Si la phase φ est caractéristique, alors

$$v^\varepsilon \sim a_0\, e^{i\varphi/\varepsilon}, \quad \det(L(i\, d\varphi)) = 0, \tag{14}$$

est d'amplitude de l'ordre de 1 et définit une solution qui se propage à la vitesse de groupe.

Ce procédé peut être itéré pour déterminer successivement les coefficients a_k dans (3) en résolvant une suite de problèmes de Cauchy dont les données dépendent des solutions déjà trouvées. C'est la construction de Lax et Lax a montré que les solutions ainsi définies sont des solutions approchées de (2) pour ε petit.

La méthode de Lax s'étend aux problèmes non linéaires

$$Lv^\varepsilon = f(v^\varepsilon), \tag{15}$$

pour construire des solutions approchées oscillant sur une seule phase φ donc une optique géométrique à une phase. Comme les non linéarités créent des harmoniques $e^{i\,k\varphi/\varepsilon}$ $k \in \mathbb{Z}$, les solutions approchées sont maintenant cherchées sous la forme

$$u^\varepsilon = \sum_{k,\ell} a_{k,\ell}(t,x)\, e^{i\,\ell\varphi/\varepsilon} = \sum_k \varepsilon^k\, U_k(t,x,\varphi/\varepsilon), \tag{16}$$

avec des enveloppes $U_k \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, périodiques dans la variable rapide.

Cependant le phénomène non linéaire le plus intéressant concerne plutôt les oscillations avec plusieurs phases. On cherche dans ce cas des solutions approchées de la forme

$$u^\varepsilon = \sum_k \varepsilon^k\, U_k(t,x,\varphi_1/\varepsilon,\dots,\varphi_m/\varepsilon),$$

les fonctions U_k étant périodiques dans les variables $\theta_1,\dots,\theta_m$ et les phases $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ étant supposées $\mathbb{Q}$-indépendantes.

Le terme principal $U_0(t,x,\varphi_1/\varepsilon,\dots,\varphi_m/\varepsilon)$ est souvent représenté comme superposition (en général infinie) d'ondes de la forme (16)

$$U_0(t,x,\varphi_1/\varepsilon,\dots,\varphi_m/\varepsilon) = \sum_j \mathcal{U}_j(t,x,\psi_j/\varepsilon)$$

avec des phases ψ_j combinaison des phases $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ et *caractéristiques.*

Les couplages non linéaires vont donc introduire des termes de source de la forme

$$a(t,x)\, e^{i\,(\alpha_1\psi_1+\cdots+\alpha_k\psi_k)/\varepsilon}$$

qui, d'après ce qu'on a vu, feront osciller la solution sur la phase

$$\psi = \alpha_1\psi_1 + \cdots + \alpha_k\psi_k \tag{17}$$

si ψ est aussi *caractéristique.* On dit alors qu'on a une *relation de résonance* (phase matching) entre les phases ψ et ψ_k. En optique physique le phénomène de pompage optique est un exemple de résonance de phase. L'optique géométrique multiphase ou résonnante décrit ce type d'interaction.

En terme de géométrie l'égalité (17) s'interprète comme une *relation abélienne* particulière sur les feuilletages de codimension 1 sur $\mathbb{R}^{1+d}$ définis par les phases ψ et ψ_k. Cet exposé décrit quelques exemples tirés de l'optique géométrique multiphase ou résonnante susceptibles de poser des questions de géométrie des tissus.

1. Solutions approchées de l'optique géométrique résonnante en une dimension d'espace

On donne dans ce paragraphe une idée de l'optique géométrique résonnante en une dimension d'espace et de ses relations avec la géométrie des tissus plans. On considère un système 3×3, strictement hyperbolique, semi-linéaire, en une dimension d'espace.

Après diagonalisation les équations (15) prennent la forme simple suivante

$$X_k u_k^\varepsilon := \partial_t u_k^\varepsilon + \lambda(t,x)\partial_x u_k^\varepsilon = f_k(t,x,u_1^\varepsilon,u_2^\varepsilon,u_3^\varepsilon), \quad k = 1,2,3. \tag{18}$$

Les $\lambda_k(t,x)$ sont des réels qu'on suppose distincts. Les fonctions f_k sont régulières en $(t,x,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

On se donne par ailleurs des données initiales oscillant sur une seule phase pour simplifier.

$$u^\varepsilon_{k\,|t=0} = A_k(x, \psi(x)/\varepsilon), \quad x \in \omega, \tag{19}$$

où ω est un intervalle de $\mathbb{R}$, $\psi \in C^\infty(\omega;\mathbb{R})$ telle que $d\psi \neq 0$, p.p $x \in \omega$ et $A_k \in C(\omega \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Introduisons les trois phases solutions de

$$X_k\, \psi_k = 0, \quad \psi_{k|t=0} = \psi,$$

dans Ω un ouvert de détermination de ω. La solution du probléme linéaire avec (19) pour donnée de Cauchy est la superposition de trois modes oscillant avec les phases ψ_k. Par couplage non linéaire, ces 3 modes oscillants interagissent.

On montre que les équations de l'optique géométrique résonnante sont de la forme

$$X_k U_k(t,x,\theta) = (\mathbf{E}_k F_k)(t,x,\theta), \tag{20}$$

$$U_k(0,x,\theta) = A_k(x,\theta), \tag{21}$$

où $U_k \in C(\Omega \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, $F_k(t,x,\theta_1,\theta_2,\theta_3)) = f_k(t,x,U_1(t,x,\theta_1),U_2(t,x,\theta_2),U_3(t,x,\theta_3))$ et où $\mathbf{E}_k$ est un opérateur intégral dont la structure dépend de l'existence ou non de résonances entre les phases ψ_k, $k = 1,2,3$ et qui décrit l'interaction des modes oscillants entre eux. Malgré les apparences dans (20) le transport s'effectue bien à la vitesse de groupe puisqu' en dimension 1 d'espace celle-ci coïncide avec la vitesse de phase du fait que $\lambda(t,x,\xi) = \lambda(t,x)\,\xi$.

DÉFINITION *Une résonance sur un ouvert* Ω *est un triplet* $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ *de fonctions régulières vérifiant* $d\varphi_k \neq 0$ *sur* Ω *et le système d'équations*

$$X_k \varphi_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, \tag{22}$$

$$\sum_{1 \leq k \leq 3} d\varphi_k = 0\,. \tag{23}$$

La notion de résonance ne dépend pas des champs X_k mais des feuilletages qu'ils définissent qui foement un tissu sur Ω. L'ensemble des résonances est un espace vectoriel. Les résonances correspondent exactement aux relations abéliennes des tissus. L'existence de résonances est un phénomène rare puisque pour un 3-tissu l'espace des résonances est de dimension 0 ou 1 (modulo les constantes) et vaut 0 génériquement. De plus la résonance d'oscillations ne peut avoir lieu que si d'une part les champs de vecteurs sont bien choisis et d'autre part les phases sont exactement les phases résonnantes. C'est cependant un phénomène important puisque les champs à coefficients constants sont résonnants pour les phases $\varphi_k = \alpha_k(x - \lambda_k t)$ avec $\sum \alpha_k = \sum \alpha_k \lambda_k = 0$.

Pour comprendre la structure des opérateurs $\mathbf{E}_k$, il faut observer que les non linéarités $f_k(u_1, u_2, u_3)$ font apparaître des oscillations sur toutes les phases $\sum \alpha_k \psi_k$ mais que, pour un $1 \leq j \leq 3$ fixé, seules les combinaisons vérifiant $X_j(\sum \alpha_k \psi_k) = 0$ seront propagées par le champ X_j, ainsi qu'on l'a expliqué plus haut. Comme toutes les phases ψ_k ont même trace en $t = 0$, la condition $X_j(\sum \alpha_k \psi_k) = 0$ implique qu'il existe β_j tel que la relation de résonance s'écrive $\sum \alpha_k \psi_k = \beta_j \psi_j$. Pour qu'il existe des interactions de modes il faut donc que $\sum \alpha_k \psi_k = 0$, quitte à modifier les coefficients α_k.

Ceci conduit à introduire l'ensemble des *relations de résonance*

$$\mathbf{R} = \{\alpha \in \mathbb{R}^3 ; \sum \alpha_k \psi_k = 0\}. \tag{24}$$

Quand $\mathbf{R} = \{0\}$, on pose

$$(\mathbf{E}_1 F)(t, x, \theta_1) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \,\frac{d\theta_2}{2\pi} \frac{d\theta_3}{2\pi},$$

avec des définitions similaires pour les autres indices. Quand $\mathbf{R}$ est non trivial, $\mathbf{R}$ est une droite d'après ce qui précède. Soit $\alpha \neq 0$ dans $\mathbf{R}$. On pose

$$(\mathbf{E}_1 F)(t, x, \theta_1) = \lim_{h \to \infty} \int_0^h F(\theta_1, -\frac{\alpha_1 \theta_1 + \alpha_3 \theta_3}{\alpha_2}, \theta_3) \,\frac{d\theta_3}{h},$$

remarquant que cette définition est indépendante du choix de α dans $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ et qu'elle consiste à prendre la moyenne d'une fonction presque-périodique en θ_3. Les définitions de $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_3$ sont analogues.

Les opérateurs $\mathbf{E}$ décrivent les interactions entre les 3 modes. Dans le cas non résonnant l'interaction des hautes fréquences de deux modes ne produit que de la moyenne sur le troisième mode. Dans le cas résonnant l'interaction produit aussi des oscillations. La validité de l'optique géométrique résonnante repose sur le résultat suivant.

THÉORÈME *Supposons que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^3$ on a soit*

$$\sum_k \alpha_k d\psi_k(t,x) \neq 0, \quad p.p.\ (t,x) \in \Omega,$$

soit

$$\sum_k \alpha_k d\psi_k(t,x) = 0, \quad \text{pour tout } (t,x) \in \Omega.$$

Alors il existe $T > 0$ tel que,
ι) pour tout $0 < \varepsilon \leq 1$ le problème de Cauchy (18) (19) admet une solution unique u^ε dans $\Omega_T = \Omega \cap \{0 < t < T\}$,
$\iota\iota$) les équations (20) (21) ont une solution unique $U = (U_1, U_2, U_3) \in C(\Omega_T \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$,
$\iota\iota\iota$) $u_k^\varepsilon - U_k(\,.\,, \psi_k/\varepsilon) \to 0$ dans $L^1(\Omega_T)$ quand $\varepsilon \to 0$.

REMARQUES ET QUESTIONS
1) Il y a une façon simple de savoir si un 3-tissu plan est résonnant ou pas. Considérons les 3 champs de vecteurs

$$X_1 = \partial_t,\ X_2 = \partial_x,\ X_3 = \partial_t + c(t,x)\,\partial_x.$$

Supposons que le tissu associé à ces 3 champs soit résonnant. Alors d'après (22), (23), il existe $\varphi_1 = \varphi_1(x)$, $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ telles que

$$\varphi_2'(t) + c(t,x)\varphi_1'(x) = 0.$$

Par conséquent $c(t,x) = c_1(x)c_2(t)$, ce qu'on écrit

$$\partial_t\,\partial_x\ \ln(|c(t,x)|) = 0. \tag{25}$$

Inversement, si la condition (25) est vérifiée, on montre facilement qu'il existe un unique triplet de phases résonnantes, c'est à dire vérifiant (22), (23) (modulo les constantes). La condition (25) peut s'écrire de façon invariante avec une forme de degré 2 appelée courbure du 3-tissu [BB] et qui, dans l'exemple présent, est définie par la fonction

$$\kappa = c^{-1}(t,x)\,\partial_t\,\partial_x\ \ln(|c(t,x)\,|).$$

La valeur absolue de la courbure mesure l'écart à la résonance du tissu. C'est cette propriété qui sera utilisé dans le prochain paragraphe pour exprimer qu'un tissu n'est pas résonnant.
2) On trouvera dans [JMR1] un exposé plus détaillé sur les systèmes de taille quelconque et les relations entre les opérateurs de moyenne $\mathbf{E}_k$ et la structure des résonances. Beaucoup de questions naturelles restent posées, comme l'existence de critères permettant de

caractériser les 4-tissus résonnants. L'optique géométrique résonnante en dimension $d > 1$ est étudiée dans [JMR3]. Elle nécessite des hypothèses restrictives sur les espaces de phases conduisant à la notion d'espace *cohérent*. Voir le paragraphe 3.

2. Compacité par compensation trilinéaire en une dimension d'espace et tissu plan

On décrit dans ce paragraphe un résultat d'analyse (continuité faible de formes trilinéaires) qui repose fondamentalement sur l'annulation ou non de la courbure d'un 3-tissu. L'extension à des applications quadrilinéaires est une question ouverte.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Si $u_1^\varepsilon \rightharpoonup 0$, $u_2^\varepsilon \rightharpoonup 0$ dans $L^2_{loc}(\Omega)$ et si F est une fonction bilinéaire alors en général $F(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$ ne converge pas vers 0 dans $\mathcal{D}'(\Omega)$: les fonctions quadratiques ne sont pas continues pour la topologie faible. Si maintenant on a la propriété supplémentaire que $P(x, D)u_1^\varepsilon$ reste dans un borné de $L^2_{loc}(\Omega)$, P étant elliptique d'ordre 1, alors u_1^ε converge fortement vers 0 dans $L^2_{loc}(\Omega)$ et $F(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Pour tout opérateur différentiel P d'ordre 1 sur Ω, non nécessairement elliptique, notons

$$\mathcal{W}(\Omega, P) = \{u = (u_1, \ldots, u_N) \in L^2_{loc}(\Omega); Pu =\in L^2_{loc}(\Omega)\}.$$

Tartar [T] a déterminé les fonctions quadratiques faiblement continues (produits compatibles) sur $\mathcal{W}(\Omega, P)$. L'exemple le plus important est fourni par produit extérieur des formes différentielles qui est le seul produit compatible avec la différentiation extérieure (Lemme du "div-rot"). Pour plus de détails voir [M], [T] et enfin [G1] pour une généralisation du Lemme du "div-rot".

La même question pour les produits trilinéaires est plus complexe.

Restreignons nous au cas de $\mathbb{R}^2$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{1+1}$ et $X_j = \partial_t + \lambda_j \, \partial_x \, , j = 1 \ldots, N$ N champs de vecteurs sur Ω. Notons

$$\mathcal{W}(\Omega, X) = \{u = (u_1, \ldots, u_N) \in L^2_{loc}(\Omega); X u = (X_1 \, u_1, \ldots, X_N \, u_N) \in L^2_{loc}(\Omega)\}.$$

On cherche à savoir si le produit $u_1 \cdots u_N$ est bien défini et faiblement continu de $\mathcal{W}(\Omega, X)$ dans $L^2_{loc}(\Omega)$.

La réponse pour $N = 2$ est une conséquence simple du théorème de compacité par compensation: si en tout point de Ω les deux champs de vecteurs X_1 et X_2 sont indépendants, le produit $(u_1, u_2) \to u_1 u_2$ est bien défini sur $\mathcal{W}(\Omega, X)$ à valeurs dans $L^2_{loc}(\Omega)$ et il est faiblement continu. Dans le cas particulier où $X_j \, u_j = 0$, $j = 1, 2$ le résultat est une conséquence directe du théorème de Fubini.

Dans le cas $N = 3$ la présence de résonances pour le triplet (X_1, X_2, X_3) de champs deux à deux indépendants est une obstruction à la continuité faible comme le montre la remarque suivante. En effet si (X_1, X_2, X_3) est résonnant dans Ω il existe $\omega \subset \Omega$ et trois phases $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ telles que dans ω on ait

$$\begin{aligned} &X_j \, \varphi_j = 0 \, , \quad j = 1, 2, 3, \\ &\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0. \end{aligned}$$

Alors pour tout triplet d'amplitudes a_j régulieres et à support dans ω les fonctions

$$u_j^\varepsilon := a_j \, e^{i\,\varphi_j/\varepsilon}$$

définissent une suite de fonctions $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon)$ appartenant à $\mathcal{W}(\Omega, X)$ et convergeant faiblement vers 0 tandis que le produit

$$u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon u_3^\varepsilon = a_1 a_2 a_3$$

ne tend pas vers 0 si $a_1 a_2 a_3 \neq 0$. Les phases résonnantes fournissent donc un contrexemple oscillant à la non continuité du produit $(u_1, u_2, u_3) \to u_1 u_2 u_3$. La suite de ce paragraphe concerne la réciproque: l'absence de résonance suffit pour établir la continuité du produit. Au moyen d'une analyse harmonique asymptotique, Métivier et Schochet [MS] ont complété ce résultat en prouvant que seules les oscillations sur le triplet de phases résonnantes empêchent la continuité faible.

Théorème [JMR2] *Soient X_j, $j = 1, 2, 3$ trois champs de vecteurs deux à deux indépendants sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ tels que la courbure du 3-tissu associé ne s'annule pas en un point $y \in \Omega$. Alors il existe un voisinage ouvert ω de y dans Ω tel que l'application $(u_1, u_2, u_3) \to u_1 u_2 u_3$ soit bien définie et faiblement continue de $\mathcal{W}(\omega, X)$ dans $L^2_{loc}(\omega)$.*

Éléments de preuve.

1) Il faut d'abord un outil capable de détecter la présence d'oscillations dans une suite bornée de fonctions de $L^2(\Omega)$: ce sont les mesure de défaut semi-classiques (ou mesures de Wigner) de P. Gérard [G2], P.-L. Lions-T. Paul [LP]. Voir aussi l'exposé introductif de Burq [B].

Soit $q \in \mathcal{S}(T^*(\Omega))$ et

$$q(x, D)u(x) = \frac{1}{2\pi^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\,x\cdot\xi} q(x,\xi) \hat{u}(\xi)\, d\xi$$

Étant donnée une suite $u^\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $L^2(\Omega)$ on introduit la suite

$$(q(x, \varepsilon D)u^\varepsilon, u^\varepsilon) \tag{26}$$

où les parenthèses désignent le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ de sorte que (26) représente une sorte de moment microlocal d'ordre 2.

Si $u^\varepsilon = a(x) e^{i\,\varphi(x)/\varepsilon}$, on montre que, à une suite fortement convergente vers 0 dans L^2 près,

$$q(x, \varepsilon D)\big(a(x) e^{i\,\varphi(x)/\varepsilon}\big) \sim q(x, d\psi(x)) a(x) e^{i\,\varphi(x)/\varepsilon},$$

de sorte que la suite (26) correspondant à la suite $u^\varepsilon = a(x) e^{i\,\varphi(x)/\varepsilon}$ converge vers

$$\int_{\mathbb{R}^d} q(x, d\psi(x))\, |a(x)|^2 \, dx = \int_{T^*(\mathbb{R}^d)} q(x,\xi)\, d\mu(x,\xi),$$

avec

$$\mu = \int \delta(\xi - d\psi(x))\, |a(x)|^2\, dx.$$

Cet exemple montre commment la phase et l'amplitude de la suite oscillante sont prises en compte par la limite de la suite (26). Le résultat général est le suivant.

Théorème ([G2],[LP]). *Il existe une sous-suite ε' et une mesure μ positive sur $T^*(\mathbb{R}^d)$ telle que pour tout $q \in \mathcal{S}(T^*(\mathbb{R}^d))$,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (q(x, \varepsilon D) u^{\varepsilon'}, u^{\varepsilon'}) = \int_{T^*(\mathbb{R}^d)} q(x, \xi)\, d\mu(x, \xi).$$

On dit alors que μ est une mesure de défaut semi-classique de la suite u^ε, ce qu'on note $\mu \in M_{sc}(u^\varepsilon)$. Lorsqu'il y a unicité de la mesure semi-classique on dit que la suite est pure et on note $\mu = M_{sc}(u^\varepsilon)$.

À des changements de variables indépendantes agissant sur les fonctions correspondent des transformations canoniques opèrant sur les mesures de défaut associées.

En considérant des expressions croisées $(q(x, \varepsilon D)u^\varepsilon, v^\varepsilon)$, on introduit des mesures non nécessairement positives formant l'ensemble $M_{sc}(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ et on a des inégalités: pour toute mesure $\mu \in M_{sc}(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ il existe $\mu_1 \in M_{sc}(u^\varepsilon)$, $\mu_2 \in M_{sc}(v^\varepsilon)$ telles que

$$\mu \ll \sqrt{\mu_1 \mu_2}\,.$$

On en déduit le résultat suivant.

Proposition *Soient u^ε et v^ε deux suites pures dont les mesures de défaut semi-classiques μ et ν sont étrangères. Alors si l'une des deux mesures a son support disjoint de 0, pour tout $\sigma \in C_0^0(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$(\sigma(\varepsilon D)u^\varepsilon, v^\varepsilon) \to 0 \tag{27}$$

quand $\varepsilon \to 0$.

2) On peut décrire maintenant les principales étapes d'une démonstration du Théorème de compacité par compensation.

On se ramène par changement de variable au cas où $X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_x$ et $X_3 = \partial_t + c(t,x)\,\partial_x$. La courbure du 3-tissu associé à ces champs s'écrit

$$c^{-1} \partial_t \partial_x \ln(|c|).$$

Pour montrer que $\int_\omega \varphi u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon u_3^\varepsilon \to \int_\omega \varphi u_1 u_2 u_3$, il suffit, quitte à modifier la première suite, de prouver que $\int_\omega u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon u_3^\varepsilon \to \int_\omega u_1 u_2 u_3$. Soit $1 = \Delta_0(\xi) + \sum_{k \geq 1} \Delta(2^k \xi)$, avec Δ porté par la couronne $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$, une partition dyadique de l'unité. On note $\Delta_k = \Delta(2^{-k}D)$. De $\sum_{k\in\mathbb{N}} \Delta_k\, u_j^\varepsilon = u_j^\varepsilon$, $j = 1,2,3$ on tire

$$\int_\omega u_1^\varepsilon u_2^\varepsilon u_3^\varepsilon = \sum_{i,j,k} \int_\omega \Delta_i\, u_1^\varepsilon\, \Delta_j\, u_2^\varepsilon\, \Delta_k\, u_3^\varepsilon.$$

Mais dans le terme de droite tous les termes (i,j,k) tels que le plus grand des indices dépasse de plus de 3 les deux autres s'annulent puisqu'alors 0 n'est pas dans le spectre de $\Delta_i\, u_1^\varepsilon\, \Delta_j\, u_2^\varepsilon\, \Delta_k\, u_3^\varepsilon$. Il suffit donc d'étudier une combinaison linéaire finie de termes de la forme

$$(28) \qquad I_{0,\alpha_2,\alpha_3} = \sum_{i+\alpha_2\geq 0,\, i+\alpha_3\geq 0} \int_\omega \Delta_i\, u_1^\varepsilon\, \Delta_{i+\alpha_2}\, u_2^\varepsilon\, S_{i+\alpha_3}\, u_3^\varepsilon, \quad |\alpha_2| \leq 2,\ |\alpha_3| \leq 2$$

ainsi que ceux qui s'en déduisent par permutation des indices 1,2,3, en notant $S_k = \sum_{\ell\leq k} \Delta_\ell$. Chaque terme de la série dans (28) est une fonction continue pour la topologie faible de $L^2(\Omega)$. Pour conclure on a besoin d'une estimation uniforme en ε sur la convergence des séries (28). Il suffit d'étudier la série définissant $I_{0,0,0}$.

Proposition *Soient v_j^ε une suite bornée de $W(X_j,\omega)$, $j = 1,2,3$. On suppose que 0 n'est pas dans le support de la mesure de défaut de $v_1^\varepsilon v_2^\varepsilon$. Alors il existe une fonction δ décroissante et tendant vers 0 à l'infini telle que*

$$(29) \qquad |\int_\omega v_1^\varepsilon v_2^\varepsilon S_i v_3^\varepsilon| \leq \delta(i) \prod_{j=1,2,3} \|v_j^\varepsilon\|_{W(X_j,\omega)}.$$

Posant $v_1^\varepsilon = \Delta_i u_1^\varepsilon$, $v_2^\varepsilon = \Delta_i u_2^\varepsilon$ et $v_3^\varepsilon = u_3^\varepsilon$ et notant que

$$\|\Delta_i u\|_{W(X,\omega)} \leq C\, a_i(u)\, \|u\|_{W(X,\omega)}, \quad i \in \mathbb{N},\ \|a(u)\|_{\ell^2} \leq 1,$$

on obtient facilement l'uniformité désirée.
L'estimation (29) résulte de l'étude des mesures de défaut $M_{sc}(v_1^\varepsilon v_2^\varepsilon, v_3^\varepsilon)$.

Lemme 1 *Soient $X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_x$. Soient v_j^ε une suite bornée de $W(X_j,\omega)$, $j = 1,2$. Alors toute mesure de $M_{sc}(v_1^\varepsilon v_2^\varepsilon)$ est absolument continue par rapport à une mesure produit $\nu_1(dx,d\xi) \otimes \nu_2(dt,d\tau)$.*

C'est rapidement vérifiable dans le cas particulier où $v_1^\varepsilon(t,x) = \psi_1(t)\psi_1^\varepsilon(x)$ et $v_2^\varepsilon(t,x) = \psi_2(x)\psi_2^\varepsilon(t)$.

Lemme 2 *Soient v_3^ε une suite bornée de $W(X_3,\omega)$. Alors toute mesure μ de $M_{sc}(v_3^\varepsilon)$ est porteé par la variété caractéristique de X_3,*

$$C_3 = \{(t,\tau,x,\xi); \tau + c(t,x)\,\xi = 0\}$$

De plus, pour tout (x,ξ) et tout (t,τ),

$$\mu(C_3(x,\xi)) = \mu(C_3(t,\tau)) = 0$$

où $C_3(x,\xi)$ désigne la section de C_3 au dessus de (x,ξ).

Les Lemmes 1 et 2 sont utilisés dans la dernière étape où intervient la condition de courbure non nulle.

Lemme 3 *On suppose qu'en tout point de ω,*

$$\partial_t \partial_x \ln(|c(t,x)|) \neq 0. \tag{30}$$

Alors, sous les hypothèses des Lemmes 1 et 2, on a

$$M_{sc}(v_1^\varepsilon v_2^\varepsilon) \perp M_{sc}(v_3^\varepsilon).$$

Preuve. On montre que $\nu(C_3) = 0$ si $\nu \in M_{sc}(v_1^\varepsilon v_2^\varepsilon)$. A cause du Lemme 1, il suffit de montrer que $\int_{C_3} \nu_1(dx,d\xi) \otimes \nu_2(dt,d\tau) = \int \nu_1(C_3(t,\tau)\nu_2(dt,d\tau) = 0$. On peut se ramener au cas où ν_1 et ν_2 sont sans atomes. Ne contribuent à l'intégrale que les (t,τ) tels que $\nu_1(C_3(t,\tau)) > 0$. Si on prouve que, pour tout $(t,\tau) \neq (t',\tau')$, on a

$$\nu_1(C_3(t,\tau) \cup C_3(t',\tau')) = \nu_1(C_3(t,\tau)) + \nu_1(C_3(t',\tau')), \tag{31}$$

on en déduit qu'il existe au plus une infinité dénombrable de (t,τ) tels que $\nu_1(C_3(t,\tau)) > 0$, et par conséquent que $\int \nu_1(C_3(t,\tau)\nu_2(dt,d\tau) = 0$.
Reste à prouver (31). Cette propriété résulte de la condition de courbure (30) qui implique que $C_3(t,\tau)$ et $C_3(t',\tau')$ sont d'intersection transverse dès que $(t,\tau) \neq (t',\tau')$. En effet, si $(x,\xi) \in C_3(t,\tau) \cap C_3(t',\tau')$, les pentes des deux courbes $C_3(t,\tau)$ et $C_3(t',\tau')$ sont dans le plan (x,ξ) égales à $-\frac{\tau}{c^2(t,x)}\partial_x\, c(t,x)$ et $-\frac{\tau'}{c^2(t',x)}\partial_x\, c(t',x)$. Comme $\frac{\tau}{c(t,x)} = \frac{\tau'}{c(t',x)}$, ces pentes ne peuvent être égales que si $t = t'$ à cause de (30). Mais ceci implique $\tau = \tau'$ ce qui est impossible. Comme ν_1 est sans atome, (31) est démontrée.

3. Résonance en dimension d'espace supérieure à 1

On considère à nouveau l'opérateur

$$L = \partial_t + \sum_{1 \leq j \leq d} A_j(t,x)\,\partial_j$$

qui n'est plus, comme dans les deux paragraphes précédents, diagonal. On introduit

$$p_\ell(\tau,\xi) = \tau + \lambda_\ell(t,x,\xi), \quad p(\tau,\xi) = \prod_\ell p_\ell(\tau,\xi), \tag{32}$$

où les λ_ℓ sont les éléments du spectre de $A(t,x,\tau,\xi)$. On notera que $p(\tau,\xi) = |p(-\tau,-\xi)|$ car que pour tout ℓ il existe $\ell_\sharp$ tel que $\lambda_\ell(\xi) = -\lambda_{\ell_\sharp}(-\xi)$. Ainsi l'ensemble des zéros de p est symétrique par rapport à $\tau = 0, \xi = 0$.

DÉFINITION *Soit p le polynôme (32). On appelle p-résonance sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{1+d}$ un n-uple $\psi_1(t,x), \ldots, \psi_n(t,x))$ de fonctions réelles de classe $C^\infty(\Omega)$ et de différentielle non nulle sur Ω, satisfaisant*

$$p(t,x,d\psi_k(t,x)) = 0\,, \quad 1 \le k \le n \tag{33}$$

$$\sum_k d\psi_k = 0 \tag{34}$$

Quelque soit d, le système (33) (34) est surdéterminé. Il n'y a donc pas nécessairement de p-résonance. Si $d = 1$ le système est linéaire. Si $d > 1$ le système n'est plus linéaire.

1) Lorsque $d = 1$, la liaison entre résonance et géométrie des tissus est simplifiée par le fait que chaque facteur $p_\ell = \tau + \lambda_\ell(t,x)\cdot\xi$ est linéaire et définit un unique feuilletage dans le plan (t,x). Ce feuilletage peut être défini de deux façons 1) comme l'ensemble des courbes caractéristiques de p_ℓ qui sont les courbes intégrales du champ de vecteur $(1,\lambda_\ell(t,x))$ ou 2) comme l'ensemble des lignes de niveau de n'importe quelle solution lisse de l'équation eikonale $\partial_t\psi + \lambda_\ell(t,x)\,\partial_x\psi = 0$.

2) Dans le cas $d > 1$ une fonction p_ℓ ne définit pas canoniquement un feuilletage de codimension 1 sur Ω mais une infinité car il y a en particulier une infinité de solutions ψ de $p_\ell(t,x,d\psi) = 0$. De plus pour tenir compte de la présence de caustiques, les sous-variétés lagrangiennes annulant p sont les objets naturels à considérer. Ces variétés sont localement, en dehors des caustiques, le graphe de la différentielle d'une fonction (phase) et sont donc munies d'un feuilletage canonique de codimension 1 formé par les surfaces de niveau de cette phase. Par projection canonique $T^*(\mathbb{R}^{1+d}) \to \mathbb{R}^{1+d}$ ce feuilletage définira en général localement en dehors des caustiques un tissu de codimension 1. En résumé lorsque $d > 1$ un polynôme p ne définit plus localement un tissu mais une infinité, dont le nombre de feuilletages est sans relation a priori avec le degré du polyôme p. Un tel tissu est appelé un p-tissu.

3) Soient $\psi_1, \ldots, \psi_n$ des solutions lisses sur Ω de

$$p(t,x,d\psi(t,x)) = 0,$$

définissant un n-tissu sur Ω. Une relation abélienne sur ce tissu est un n-uple de fonctions $f_k \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tel que

$$\sum_k f_k'(\psi_k)\,d\psi_k \equiv 0,$$

les fonctions $f_k'(\psi_k)$ ne s'annulant pas dans Ω. Alors les fonctions

$$\varphi_k(t,x) = f_k(\psi_k(t,x))$$

définissent une résonance puisque, par homogénéité ou imparité de p, on a $p(t,x,d\varphi_k) = \pm f_k'(\psi_k)\, p(t,x,d\psi_k) = 0$.

4) La notion de relation de résonance du paragraphe 1 s'étend aussi au cas $d > 1$. On a des relations évidentes entre les différentes notions

a) toute p-résonance est une relation abélienne sur le p-tissu qui lui est associé.

b) toute relation de résonance définit une relation abélienne sur le p-tissu qui lui est associé.

c) toute relation abelienne sur un p-tissu définit une p-résonance.

5) Pour des raisons d'analyse nous avons aussi utilisé la notion d'espace de phase cohérent [HMR], [JMR3].

DÉFINITION *On dit qu'un espace vectoriel réel $\Phi(\Omega) \subset C^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ est p-cohérent si pour tout $\varphi \in \Phi(\Omega)$ on a soit*

$$p(t,x,d\varphi(t,x)) \neq 0\,, \quad (t,x) \in \Omega,$$

soit

$$d\varphi(t,x) \neq 0\,, \quad p(t,x,d\varphi(t,x)) = 0\,, \quad (t,x) \in \Omega.$$

Un espace p-cohérent est de dimension inférieure ou égale à $d+1$. Un exemple typique est fourni par les phases linéaires qui forment un espace p-cohérent dès que p est indépendant de (t,x).

6) Voici un exemple de résonance tiré de [HMR]. Soit $p = \tau(\tau^2 - |\xi|^2),\ \xi \in \mathbb{R}^d,\ d \geq 2$. Le polynôme p est par exemple le polynôme caractéristique du linéarisé des équations d'Euler de la dynamique des gaz autour d'un état de vitesse nulle, de densité constante et de vitesse du son 1. Les fonctions $\psi_1(t,x) = t - \alpha_1(x)$, $\psi_2(t,x) = \alpha_2(x) - t$ et $\psi_3(t,x) = \alpha_1(x) - \alpha_2(x)$ (qu'on suppose de différentielle jamais nulle) annulent p dès que $|\alpha_1'| = |\alpha_2'| = 1$ et vérifient

$$\sum_{1 \leq j \leq 3} \psi_j = 0$$

donc définissent une résonance. Remarquons que les trois feuilletages définis par les fonctions ψ_j ne sont pas en position générale car leurs différentielles sont coplanaires alors que la dimension de Ω est supérieure à 1+2.

Y a-t-il d'autres p-résonances à 3 fonctions?

Essayons une réponse. Soit ψ_3 une solution arbitraire de $\partial_t \psi_3 = 0$ et cherchons ψ_1 et ψ_2 solution de $\partial_t \varphi - |\partial_x \varphi| = 0$ telle que

$$\psi_3 = \psi_1 - \psi_2. \tag{35}$$

Introduisons

$$\psi = \psi_1 + \psi_2. \tag{36}$$

Comme $\partial_x\psi_3 \cdot \partial_x\psi = |\partial_x\psi_1|^2 - |\partial_x\psi_2|^2 = |\partial_t\psi_1|^2 - |\partial_t\psi_2|^2 = \partial_t\psi_3\partial_t\psi$, on a

$$\partial_x\psi_3 \cdot \partial_x\psi = 0 \tag{37}$$

Comme $\partial_t\psi = |\partial_x\psi_1| + |\partial_x\psi_2| = \frac{1}{2}|\partial_x\psi_3 + \partial_x\psi| + \frac{1}{2}|\partial_x\psi_3 - \partial_x\psi|$, tenant compte de (37), il vient $|\partial_x\psi_3 \pm \partial_x\psi| = \sqrt{|\partial_x\psi_3|^2 + |\partial_x\psi|^2}$ donc

$$\partial_t\psi^2 = |\partial_x\psi_3|^2 + |\partial_x\psi|^2. \tag{38}$$

Inversement, si ψ vérifie (37) et (38) les fonctions ψ_1 et ψ_2 définies par (35) et (36) sont des solutions de $\partial_t\varphi - |\partial_x\varphi| = 0$. On est donc ramené à chercher ψ solution de (37) et (38), ψ_3 étant considéré comme un paramètre. Posons

$$r = \psi_3'(x) \cdot \xi \tag{39}$$

$$s = \tau^2 - |\psi_3'(x)|^2 - |\xi|^2. \tag{40}$$

On vérifie que

$$\{r, s\} = \psi_3''(x)(\psi_3'(x), \psi_3'(x)) - \psi_3''(x)(\xi, \xi). \tag{41}$$

Supposons $d = 2$. On distingue deux cas.

ι) La fonction ψ_3 vérifie $\psi_3''(x)(\psi_3'(x), \psi_3'(x)) \neq 0$ et $\psi_3''(x)(\xi, \xi) \neq 0$ pour tout $\xi \perp \psi_3'(x)$ et tout $x \in \omega$. C'est le cas générique. Une solution ψ commune commune aux deux équations (37) et (38) a une différentielle qui annule r et s donc $\{r, s\}$. On observe que les deux équations $r = 0$ et $\{r, s\} = 0$ déterminent un unique $\partial_x\psi$ indépendant de t. On a donc $\partial_t\partial_x\psi = 0$. L'équation $s = 0$ détermine alors $\partial_t\psi$ indépendant de t mais aussi de x à cause de ce qui précède. Donc la solution commune ψ est nécéssairement de la forme $\psi = 2\alpha t + \varphi(x)$ et par suite $\psi_j = \alpha t - \varphi_j(x),\ j = 1, 2$. De telles solutions existent:ce sont les solutions de [HMR] déjà trouvés au début de 6).

$\iota\iota$) On suppose au contraire que sur l'ouvert ω, la fonction ψ_3 vérifie

$$\psi_3''(x)(\psi_3'(x), \psi_3'(x)) \equiv 0. \tag{42}$$

Une condition suffisante pour qu'il existe une solution ψ commune à (37) et (38) est que $\{r, s\} = 0$ sur $r = 0$, c'est à dire que ψ_3 satisfasse sur ω la condition supplémentaire suivante

$$\psi_3''(x)(\xi, \xi) = 0 \text{ si } \psi_3'(x)(\xi) = 0 \tag{43}$$

On connait les solutions de (42) (43): ce sont les fonctions affines et la fonction "angle" θ dont le graphe est un hélicoïde. Contrairement au cas ι) $\partial_x\psi$ n'est plus uniquement déterminé par (42) et peut donc dépendre de t. Les fonctions $\psi_1,\ \psi_2$ se calculent à partir de ψ_3 et ψ. Montrons que les solutions correspondant à ψ_3 égale à une fonction "angle" sont différentes des solutions de ι). On vérifie d'abord qu' à cause de l'équation $r = 0$ la fonction ψ est radiale en x:$\psi(t,x)=\psi(t,\rho)$. La deuxième équation implique alors que, sur la nappe $\tau=\sqrt{|\xi|^2+\frac{1}{\rho^2}}$,

$$\partial_t\psi=\sqrt{|\partial_\rho\psi|^2+\frac{1}{\rho^2}}.$$

Il existe donc bien des résonances ne dépendant pas de façon affine de t.

7) La focalisation peut-elle fabriquer des relations de résonance? On construit un exemple où il n'existe pas de relation de résonance entre les phases associées à deux lagrangiennes annulant $\tau^2-|\xi|^2=0$. On se place dans un ouvert de $\mathbb{R}^{1+2}$ où une des lagrangiennes définit un 3-tissu local après la caustique et est fixée tandis que l'autre définit un p-1-tissu mais est arbitraire à part cela. L'exemple est tiré de [JMR4] où on trouvera un autre exemple avec 5 feuilletages.

On considère dans $T^*(\mathbb{R}^{1+2})$ la lagrangienne S annulant $\tau-|\xi|$ et coupant $t=0$ selon le graphe de la differentielle de $\psi(y_1,y_2)=y_2+y_1^2/2$. Cette phase focalise à $t>0$. La variété S est globalement paramétrée par

$$\begin{cases} t &= s, & \tau &= (1+y_1^2)^{1/2},\\ x_1 &= y_1-s\,y_1/(1+y_1^2)^{1/2}, & \xi_1 &= y_1,\\ x_2 &= y_2-s\,/(1+y_1^2)^{1/2}, & \xi_2 &= 1.\end{cases}$$

La caustique $\mathcal{C}$ est l'image par la projection canonique du sous ensemble $\mathcal{C}_S$ de S qui a pour équation, dans le système de coordonnées (s,y),

$$s=(1+y_1^2)^{3/2}.$$

Donc

$$\mathcal{C}=\{(t,x)\in\mathbb{R}^{1+2};t^{2/3}=x_1^{2/3}+1,\ t\geq 1\}.$$

Soit q la restriction à $\mathcal{S}$ de la projection canonique $T^*(\mathbb{R}^{1+2})\to\mathbb{R}^{1+2}$. L'ensemble $q^{-1}(\mathcal{C})$ est la réunion de $\mathcal{C}_S$ et d'une courbe régulière $\mathcal{S}_S$ d'équation

$$s=\sigma(y_1)$$

avec $\sigma(y_1)\leq(1+y_1^2)^{3/2}$ l'égalité n'étant réalisée que pour $y_1=0$, $s=1$. $\mathcal{C}_S$ est formé des points où q est singulière tandis que q est régulière aux points de $\mathcal{S}_S\setminus\mathcal{C}_S$. Notons

$$G_0:=\{(t,y)\ :\ 0\leq t<\sigma(y_1)\,\} \qquad ()$$

l'ensemble des points antérieurs à $\mathcal{S}_S$

$$G_1:=\{\ (t,y)\ ;\ s(y_1)<t<(1+y_1^2)^{3/2},\ y_1>0\ \}$$
$$G_2:=\{\ (t,y)\ ;\ s(y_1)<t<(1+y_1^2)^{3/2},\ y_1<0\ \}$$

et

$$G_\infty := \{(t,y)\,;\,(1+y_1^2)^{3/2} < t\,\}\,.$$

L'application q est un difféomorphisme

$$q : G_0 \to \Omega_0 := \{(t,x)\,;\, 0 \le t < (x_1^{2/3}+1)^{3/2}\,\}$$

et est aussi un difféomorphisme

$$q : G_k \to \Omega_\infty := \{(t,x)\,:\, t > (x_1^{2/3}+1)^{3/2}\,\}, \quad k = 1,2,\infty.$$

Avant la caustique, c'est à dire sur Ω_0, $q^{-1}(t,x)$ ne contient qu'un seul point de coordonnées $(t, g_0(t,x))$ et la lagrangienne ne définit qu'une seule phase

$$\varphi(t,x) = \psi(t, g_0(t,x)).$$

Après la caustique, c'est à dire sur Ω_∞, $q^{-1}(t,x)$ contient 3 points de coordonnées $(t, g_k(t,x)) \in G_k$, $k = 1,2,\infty$, définissant 3 phases

$$\varphi_k(t,x) = \psi(t, g_k(t,x))\,,\; k = 1,2,\infty.$$

On a donc

$$(t, g_k(t,x)) = (t, y_1, y_2) := (t,\; h_{k,1}(t,x_1),\; x_2 + h_{k,2}(t,x_1))\,.$$

Les phases s'écrivent

$$\varphi_k(t,x) = x_2 + h_{k,2} + (h_{k,1})^2/2\,.$$

et on vérifie que leurs différentielles sont données par

$$d\varphi_k(t,x) = (1+h_{k,1}^2)^{1/2}dt + h_{k,1}dx_1 + dx_2.$$

On remarque que les 3 différentielles sont linéairement indépendantes deux à deux puisque les valeurs des fonctions $h_{k,1}$ sont différentes. Comme les fonctions g_k se prolongent continuement à $\overline{\Omega}_\infty$ les phases $\varphi_k\,, k = 0,1,2,\infty$ admettent des prolongements $C^1(\overline{\Omega}_\infty)$. Notons

$$\mathcal{C}_1 := \mathcal{C} \cap \{x_1 > 0\}\,, \quad \mathcal{C}_2 := \mathcal{C} \cap \{x_1 < 0\}.$$

Pour $k = 1,2$, φ_k est le prolongement analytique de φ_0 à travers $\mathcal{C}_k$. En particulier, $\varphi_k = \varphi_0\,,\, d\varphi_k = d\varphi_0$ sur $\mathcal{C}_k$. De plus $\varphi_1 = \varphi_\infty\,,\, d\varphi_1 = d\varphi_\infty$ sur $\mathcal{C}_2$ et $\varphi_2 = \varphi_\infty\,,\, d\varphi_2 = d\varphi_\infty$ sur $\mathcal{C}_1$, les graphes à $t = t_0$ de φ_∞ , φ_1 et φ_2 dessinant une queue d'aronde dont les points de rebroussement sont au dessus de $\mathcal{C}_k \cap \{t = t_0\}$, $k = 1,2$, φ_∞ concave formant le bas de la queue, φ_1 et φ_2 les bords, convexes qui se prolongent en φ_0 à droite et à gauche de la caustique. La droite de S d'équation $t = t_0$, $y_2 = 0$ parcouru dans le sens des y_1 croissant se projette sur la base selon une courbe paramétrée par x_1 qui va d'abord de $+\infty$ à $\mathcal{C}_2$ où x_1 rebrousse pour aller de $\mathcal{C}_2$ à $\mathcal{C}_1$ où x_1 rebrousse à nouveau pour aller de $\mathcal{C}_1$ à $-\infty$.

Proposition *Il n'existe pas de constantes réelles α_k non toutes nulles telles que*

$$\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_\infty\varphi_\infty$$

satisfasse

$$(\partial_t\varphi)^2 - |\partial_x\varphi|^2 = 0$$

sur un sous-ensemble $\omega \subset \Omega_\infty$ de mesure non nulle.

Preuve. Soient α_k 3 réels et φ donné par l'énonçé. Supposons que ω soit de mesure strictement positive. Comme les fonctions g_k sont analytiques dans Ω_∞, φ l'est aussi donc $(\partial_t\varphi)^2 - |\partial_x\varphi|^2 = 0$ dans Ω_∞. De même $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}_\infty)$.

Sur $\mathcal{C}_2$ on a $d\varphi = (\alpha_1 + \alpha_\infty)d\varphi_1 + \alpha_2 d\varphi_2$. Comme $d\varphi$, $d\varphi_1$ et $d\varphi_2$ sont dans le cône $\tau^2 - |\xi|^2 = 0$ qu'un plan homogène coupe en au plus deux génératrices, on en déduit que soit $\alpha_1 + \alpha_\infty = 0$ soit $\alpha_2 = 0$. L'argument similaire sur $\mathcal{C}_1$ implique que soit $\alpha_2 + \alpha_\infty = 0$ soit $\alpha_1 = 0$. Si $\alpha_1 = 0$ ou $\alpha_2 = 0$ alors les deux autres coefficients s'annulent puisque dans Ω_∞ les $d\varphi_k$ sont indépendantes deux à deux. Reste donc à examiner le cas où $\alpha_1 + \alpha_\infty = \alpha_2 + \alpha_\infty = 0$, c'est à dire $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_\infty$. Calculons $d\varphi(t,0,0)$ pour $t > 1$. Comme $d\varphi_\infty(t,0,0) = (1,0,1)$, $d\varphi_1(t,0,0) = (t, \sqrt{t-1}, 1)$ et $d\varphi_2(t,0,0) = (t, -\sqrt{t-1}, 1)$, on a $d\varphi(t,0,0) = (2t-1,0,1)$ qui n'appartient pas à $\tau^2 - |\xi|^2 = 0$ dans Ω_∞ où $t > 1$.

8) Quelques questions.

On suppose p indépendant de (t,x).

Concernant 6): existe-t-il des p-résonances avec des phases non linéaires? Peut-on les décrire? Existe-t-il des espaces p-cohérents formés de fonctions non linéaires?

Concernant 7): la proposition reste-t-elle vraie pour n'importe quelle fonction ψ? La proposition s'étend-elle aux relations abéliennes, autrement dit la focalisation peut-elle créer des relations abéliennes? Voir [R] dans ce même volume, qui reprend l'exemple 7) et développe un exemple de variété lagrangienne algébrique de degré 4 annulant $\tau^2 - |\xi|^2$, $\xi \in \mathbb{R}^2$ telle que le 4-tissu formé par projection sur la base de son feuilletage canonique ne possède aucune relation abélienne.

[B] N. Burq, Mesures semi-classiques et mesures de défaut, Séminaire Bourbaki, n. 826, 1996-1997.

[BB] W. Blaschke, G. Bol, Geometrie der Gewebe, Springer Verlag, 1938.

[G1] P. Gérard, Microlocal Defect Measure, Communications in Partial Differential equations, 16, 1991, pp 1761-1794.

[G2] P. Gérard, Mesures semi-classiques et ondes de Bloch, Séminaire Équations aux dérivées partielles, École Polytechnique, Exposé n. 16, 1990-1991.

[HMR] J. Hunter, A. Majda, R. Rosales, Resonantly interacting weakly nonlinear hyperbolic waves II: several space variables, Stud. Appl. Math. 75(1986), 187-226.

[JMR 1] J.-L. Joly, G. Metivier, J. Rauch, Resonant one dimensional nonlinear geometric optics J. of Funct. Anal., 114, 1993, pp 106-231.

[JMR 2] J.-L. Joly, G. Metivier, J. Rauch, Trilinear compensated compactness, Annals of Maths., 142 (1995), pp 121-169.

[JMR 3] J.-L. Joly, G. Metivier, J. Rauch, Coherent and focusing multidimensional nonlinear geometric optics, Annales de L'École Normale Supérieure de Paris, 28 (1995), pp 51-113.

[JMR 4] J.-L. Joly, G. Metivier, J. Rauch, Nonlinear oscillations beyond caustics, Comm. on Pure and Appl. Math., Vol XLIX, 1996, pp 443-527.

[La] P.Lax, Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke Math. Journal, 24 (1957) pp 627-645.

[LP] P.-L. Lions, T. Paul, Sur les mesures de Wigner, Revista Matemática Iberoamericana 9,3, 1993.

[Lu] R. K. Luneburg, Mathematical theory of optics, Univ. of California Press, Berkeley, Calif., 1964.

MS Métivier, Schochet, Interactions trilinéaires résonnantes, Séminaire Équations aux dérivées partielles, École Polytechnique, Exposé n. 6, 1995-1996.

M F. Murat, Compacité par compensation, Ann. Scula Sup. di Pisa, 5, 1978, pp 489-507.

[R] G. Robert, Un tissu sans relation abélienne obtenu par projection d'un feuilletage lagrangien, ce volume

[T] L. Tartar, Compensated compactness and applications to partial differential equations, Research Notes in Mathematics, vol 4, New-York, Pitmann Press, 1979.