

**Jeffrey Rauch**

## **À travers un prisme**

### **Introduction**

Je ne prétends pas que les mathématiques dont je vais vous parler sont des « mathématiques d'aujourd'hui » ; ce sont, en tout cas, des mathématiques que je comprends, et j'espère que cela va vous intéresser. Voici les grandes lignes de mon plan :

1. Je commencerai par une description purement géométrique de la propagation des ondes.

2. Je donnerai ensuite une description de la propagation des ondes acoustiques à l'aide des équations aux dérivées partielles (dans un cadre acoustique, les équations sont moins intimidantes que les équations de l'électromagnétisme).

3. Je parlerai enfin d'ondes électromagnétiques.

Les buts de l'exposé sont les suivants. Premièrement, j'espère que c'est un peu amusant. Mon deuxième but est indiqué dans le titre de cet exposé ; il s'agit de comprendre le fait fondamental suivant : si de la lumière blanche passe à travers un prisme, les couleurs sont séparées à la sortie du prisme. Cette expérience est représentée sur la figure 1. Il y a des couleurs qui sont plus réfractées que les autres. Ce sont les couleurs qui correspondent aux plus hautes fréquences : en particulier, sur la figure 1, le bleu et le rouge sont les couleurs les plus éloignées à la sortie du prisme. On va essayer de comprendre d'une manière un peu mathématique comment cela s'exprime. Quels sont les modèles ? Quelles sont les équations et comment les analyse-t-on ?

Dans ma vie mathématique, j'ai rencontré ce problème à plusieurs

---

\* Research supported by the U.S. National Science Foundation under grant DMS 0104096.

reprises. En particulier dans la dernière décennie, j'ai beaucoup réfléchi aux problèmes de la physique des lasers : dans ce cadre, un fait fondamental est que la vitesse de la lumière dépend de l'intensité — c'est ce qu'on appelle la *dispersion non linéaire*. Pour comprendre ce phénomène, il est essentiel de comprendre un phénomène plus élémentaire, qui est que la vitesse de la lumière dépend de la fréquence : c'est ce qu'on appelle la *dispersion linéaire*, et c'est ce dont il est question dans cet exposé.

## Une description purement géométrique de la propagation des ondes

### La loi de la réfraction et le principe de Fermat

Dans un premier temps, cette description géométrique n'a rien à voir avec la théorie des équations aux dérivées partielles. Elle commence par l'observation simple suivante : un rayon lumineux qui passe à travers une interface (entre de l'air et de l'eau, par exemple) subit une réfraction (figure 2). Sur la figure 2, on note  $\theta_1$  l'angle d'incidence et  $\theta_2$  l'angle de réfraction. L'indice 1 correspond au milieu en haut sur le dessin et l'indice 2 correspond au milieu en bas.

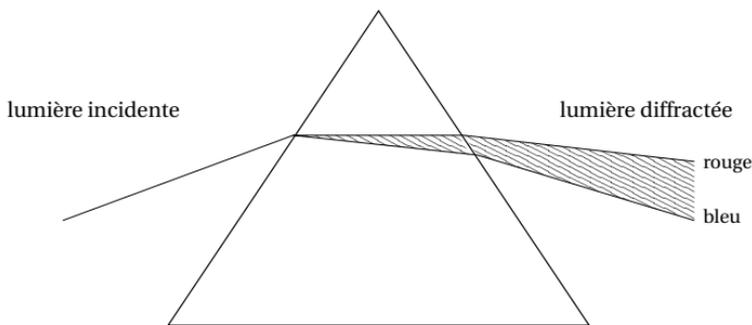


Fig. 1. Dispersion de la lumière par un prisme.

D'après l'expérience :

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = n_{12} \quad (1)$$

où  $n_{12}$  est une constante appelée *l'indice de réfraction* relatif aux milieux 1 et 2. C'est un bel exemple de la démarche expérimentale. Avec un rayon lumineux, vous faites une mesure (des angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ ) et cette mesure vous donne  $n_{12}$  avec la relation (1). À partir d'une seule expérience, vous pouvez donc prévoir les résultats de toutes les expériences futures. C'est un exemple très simple qui contient l'essence de la démarche scientifique. On fait peu de mesures et on se dote d'un outil prédictif à l'aide d'une théorie. Je pense qu'on perd du temps quand on veut montrer ce qu'est la science à partir de théories élaborées comme la mécanique newtonienne. Cet exemple est plus simple et plus net.

La relation (1), qui est la *loi de la réfraction*, est connue sous le nom de « loi de Snell »<sup>(1)</sup>. En France, elle est souvent attribuée à Descartes, qui la publia dans sa *Dioptrique*<sup>(2)</sup> (1637) et la fit ainsi connaître, mais qui la devait probablement à Snell.<sup>(3)</sup>

Le théorème suivant est dû à Fermat<sup>(4)</sup>. Ce n'est pas *le* théorème de Fermat, c'est *un* théorème de Fermat.

Reprenons l'expérience précédente. Dans le milieu du haut (l'air par exemple) la vitesse de propagation est  $c_1$ , et dans le milieu du bas, c'est  $c_2$ . Fixez deux points  $A_1$  (dans le milieu 1) et  $A_2$  (dans le milieu 2). Fermat postule que le chemin  $A_1A_2$  effectivement suivi par le rayon lumineux est celui qui minimise le temps de parcours parmi toutes les courbes qui relient les deux points : c'est le *principe de Fermat*. Et il démontre que dans le cas présent, ce chemin le plus rapide est bien une ligne brisée comme représentée sur la figure 2, et qu'il satisfait bien à la loi « de Snell » (1) : c'est le théorème annoncé. Ce résultat date du XVII<sup>e</sup> siècle, une époque très rationaliste, et il s'intègre bien dans une vision rationnelle du monde. Je ne donne pas la démonstration, c'est un exercice. Le résultat de Fermat est historiquement un peu miraculeux puisqu'à l'époque le fait que la lumière se propage à une vitesse finie n'était pas encore démontré : cela sera démontré seulement trente ans

---

<sup>1</sup>Willebrord Snell (1580-1626), mathématicien néerlandais (N.d.R.)

<sup>2</sup>Avec une « preuve » complètement fausse. (N.d.R.)

<sup>3</sup>Snell ne l'avait pas publiée, ni d'ailleurs Thomas Harriot, qui la connaissait déjà vers 1600. La loi est d'ailleurs bien plus ancienne : on la trouve dans un traité d'optique d'Ibn Sahl datant de l'an 984 environ (cf. [24]), où d'ailleurs elle est utilisée comme si elle était déjà connue... (N.d.R.)

<sup>4</sup>Pierre de Fermat (1601-1665), juriste et mathématicien français. (N.d.R.)

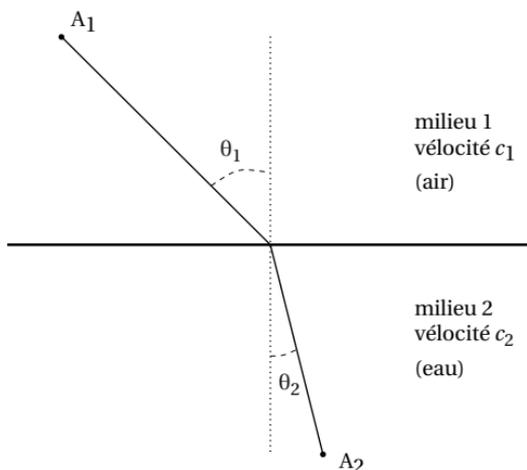


Fig. 2. Réfraction de la lumière au passage d'une interface air-eau.

plus tard par Røemer<sup>(5)</sup>.

Le principe de Fermat permet d'apporter une précision importante à la loi « de Snell », à savoir le lien avec les vitesses de propagation : l'indice de réfraction relatif aux milieux 1 et 2 est égal au quotient des vitesses dans ces milieux,

$$n_{12} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Là encore vous pouvez tester la théorie : si vous avez trois matériaux 1, 2, 3, vous faites trois mesures d'indices de réfraction  $n_{12} = c_1/c_2$ ,  $n_{23} = c_2/c_3$  et  $n_{31} = c_3/c_1$ , et vous trouvez que le produit des indices est égal à 1, comme le prévoit la théorie.

---

<sup>5</sup>Olaus Røemer (1644-1710), astronome danois. En 1675, à l'observatoire de Paris où il travaillait alors, il remarqua que les satellites de Jupiter semblaient entrer parfois en avance, et parfois en retard, dans le cône d'ombre de leur planète ; il comprit que ces écarts étaient dûs aux variations de distance entre la Terre et Jupiter, induisant des différences dans le temps que met la lumière pour nous parvenir. Il put ainsi expliquer les écarts observés, et en déduire l'ordre de grandeur correct de la vitesse de la lumière dans le vide. (N.d.R.)

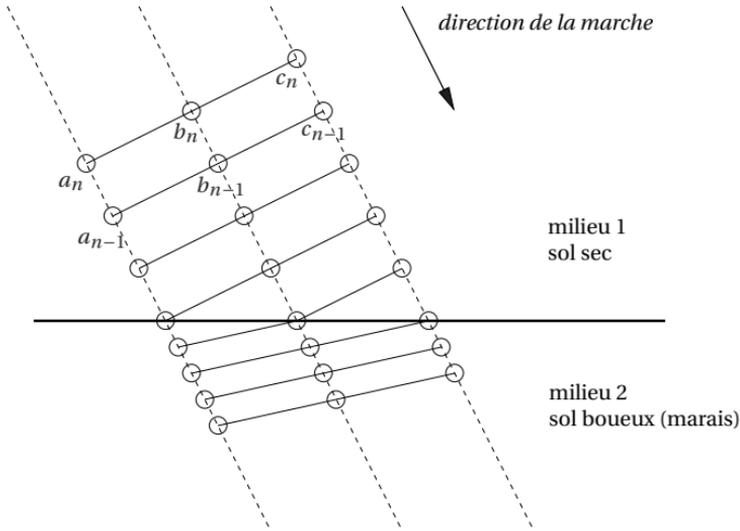


Fig. 3. Réfraction de la lumière : les rangées de soldats.

### Le modèle des rangées de soldats

Le modèle de Fermat a un défaut. Il n'explique pas du tout *comment* la lumière choisit la courbe dessinée. Cette description est donc incomplète, elle ne donne aucune idée du mécanisme.

Quand j'étais écolier, on m'a appris l'explication suivante. J'espère qu'à vous aussi on l'a apprise. C'est l'explication dite des rangées de soldats (figure 3). Les soldats :

$$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$$

marchent en rang; la première rangée est  $a_1, b_1, c_1$ , la deuxième est  $a_2, b_2, c_2$ , etc. Ils sont bien en ligne — ils ont fait beaucoup d'entraînement pendant leur service militaire. Ils arrivent à un marais boueux où ils vont marcher moins rapidement. Les soldats se déplacent dans une direction non orthogonale à l'interface avec le marais, donc le petit soldat indiqué par le point  $a_1$  arrive au marais avant le soldat indiqué par le point  $b_1$ , qui lui-même arrive dans le marais avant le soldat  $c_1$ . Dans l'intervalle de temps qui sépare l'arrivée du soldat  $a_1$  dans le marais de celle du soldat  $b_1$ , la distance parcourue par  $a_1$  est inférieure à la distance parcourue par  $b_1$ . Et ça continue, avec l'arrivée dans le marais du

soldat  $b_1$ , puis celle du soldat  $c_1$ , puis celle des autres rangées, d'abord  $a_2$ , puis  $b_2$ , etc. Pendant un certain intervalle de temps, chaque rangée de soldats est coupée en deux sous-rangées, celle des soldats qui sont déjà dans le marais et celle des soldats qui n'y sont pas encore, et ces sous-rangées ont des orientations différentes.

Cela explique très bien le fait qu'à l'interface entre un milieu lent et un milieu rapide, le front d'onde subit une discontinuité.

Cette explication a deux défauts. Au lieu de regarder les *rangées*, regardez les *colonnes* de soldats marchant les uns derrière les autres (figure 4) : au bout d'un certain temps, ils arrivent au marais. Dans le marais, ils marchent encore en ligne droite, puisqu'ils sont bien entraînés.

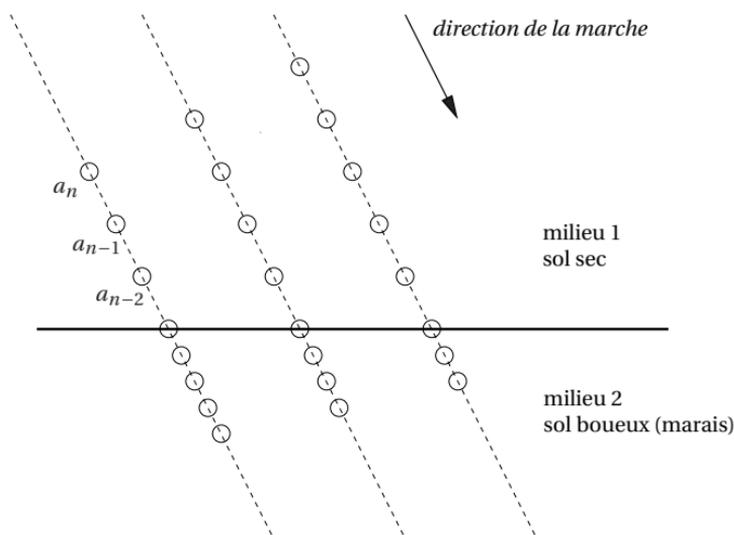


Fig. 4. Les rangées de soldats : première critique.

Ainsi, les trajectoires décrites par les *colonnes* de soldats sont des lignes droites. Cela contraste nettement avec le changement brusque de direction qu'on observe dans le phénomène de la réfraction. Cette critique justifie, à elle seule, l'abandon du modèle. D'ailleurs, le modèle des soldats a un autre défaut, tout aussi réhibitoire : il prédit, certes,

un changement brusque de la direction des *rangées* formées par les soldats marchant épaule contre épaule (« fronts d'onde » : cf. la figure 5), mais si on calcule la relation à laquelle il conduit entre l'angle d'incidence  $\theta_1$  et l'angle de réfraction  $\theta_2$  (c'est un amusant exercice de géométrie!<sup>(6)</sup>), on trouve que le rapport des sinus dépend de l'angle d'incidence, ce qui contredit la loi « de Snell ».

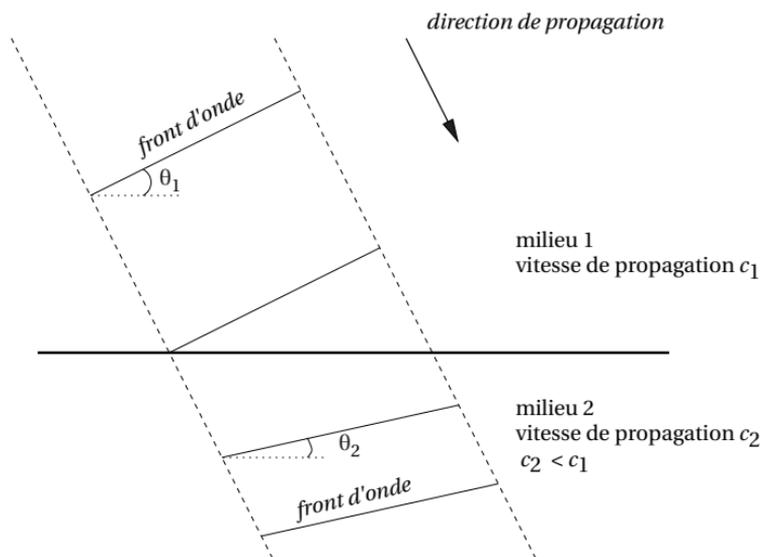


Fig. 5. Les rangées de soldats : deuxième critique.

Il existe une deuxième tentative d'explication mécaniste de la réfraction. Elle provient de la *théorie corpusculaire de la lumière*, dominante aux XVII<sup>e</sup> et XVIII<sup>e</sup> siècles : on représentait la lumière comme un flux de points matériels libres, obéissant à la mécanique de Newton. Alors, ce qui est minimisé, ce n'est pas le temps de parcours (le principe de Fermat ne s'applique pas à la mécanique), mais ce que Maupertuis<sup>(7)</sup> a appelé *l'action* ([23], 1744). D'une façon générale, *l'action* d'un point mobile libre le long d'un chemin est l'intégrale de sa quantité de

<sup>6</sup>Voir l'appendice, p. 66.

<sup>7</sup>Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759), mathématicien français. (N.d.R.)

mouvement par rapport à l'élément d'arc le long de ce chemin. Ici, la masse des mobiles est la même dans les deux milieux, on peut la factoriser, et la quantité à minimiser est donc simplement  $c_1 \ell_1 + c_2 \ell_2$ , où  $\ell_1, \ell_2$  sont les longueurs des segments parcourus (entre  $A_1$  et  $A_2$ ) dans les milieux 1 et 2 respectivement, la variable étant l'abscisse du point où le chemin rencontre l'interface entre les deux milieux. Dans le cas de la lumière (principe de Fermat), c'était  $\frac{\ell_1}{c_1} + \frac{\ell_2}{c_2}$  qu'il fallait minimiser, et on trouvait la condition

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad \text{Fermat (optique)}. \quad (2)$$

Ici, en minimisant  $c_1 \ell_1 + c_2 \ell_2$ , on trouvera donc

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{c_2}{c_1} \quad \text{Maupertuis (mécanique)}. \quad (3)$$

Ce n'est pas la même loi<sup>(8)</sup> ! Cela dit, ce modèle est meilleur que celui des rangées de soldats : ici, les corpuscules changent de direction en franchissant l'interface (de façon à minimiser l'action) au lieu de continuer tout droit comme les soldats, et la loi est de la forme « de Snell » : seul le lien entre l'indice de réfraction (défini par la loi « de Snell ») et les vitesses est inversé.

En résumé, ni le modèle des rangées de soldats ni la théorie corpusculaire ne fournissent une explication correcte du phénomène de la réfraction tel qu'il se produit avec la lumière.

## La construction de Huygens et l'équation eikonale

Il y a une autre théorie purement géométrique pour la propagation des ondes. C'est la construction de Huygens<sup>(9)</sup>. Cette construction prétend être un mécanisme, elle prétend expliquer pourquoi la propagation se fait comme indiqué précédemment. L'idée de Huygens est la

<sup>8</sup>D'ailleurs, Maupertuis pensait que son principe de moindre action s'appliquait aussi à la lumière (puisque dans la théorie corpusculaire de la lumière celle-ci était pensée comme un phénomène mécanique) et il en concluait — au contraire de Fermat — que la lumière va plus vite dans l'eau que dans l'air. Il faudra attendre les mesures directes de Foucault et Fizeau, en 1850, pour trancher expérimentalement (en faveur de Fermat). Noter que le test expérimental  $n_{12} n_{23} n_{31} = 1$  est passé avec succès par la loi de Maupertuis (3) aussi bien que par celle de Fermat (2), et qu'il n'y avait pas de moyen évident de les départager. (N.d.R.)

<sup>9</sup>Christiaan Huygens (1629-1695), physicien, mathématicien et astronome hollandais. (N.d.R.)

suivante.

L'onde perturbe l'environnement qu'elle traverse. Elle crée de petites oscillations des particules du milieu qui se comportent comme de nouvelles sources, qui créent des « ondelettes » (petites ondes). La superposition de ces ondelettes est une nouvelle onde (figure 6).

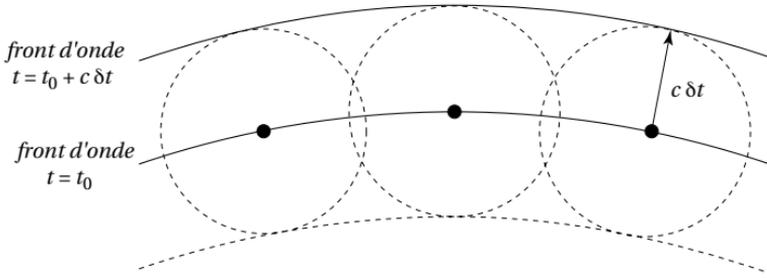


Fig. 6. Propagation de la lumière selon Huygens (1).

Si on suppose que l'onde initiale est plane et que la vitesse de chacune de ces ondelettes est la même pour chaque point source, alors l'enveloppe de ces ondelettes, la nouvelle onde, est encore une onde plane. Vous trouvez en fait aussi une onde rétrograde, ce qui est un peu gênant. C'est dommage, mais si vous ignorez cette onde rétrograde, vous avez une bonne loi de propagation. Cette construction peut être énoncée dans un cadre mathématique. Je vais énoncer cela comme un théorème :

**Théorème 1.** *Pour décrire la propagation d'un front  $\Sigma_0$  (une hypersurface) on résout l'équation*

$$\begin{cases} |\nabla \psi|(x) = \frac{1}{c(x)}, \\ \psi|_{\Sigma_0} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

où  $c(x)$  est la vitesse de propagation dans le milieu considéré au point  $x$ . Le front à l'instant  $t$  est alors donné par

$$\Sigma_t = \{x, \psi(x) = t\}.$$

C'est purement un énoncé de géométrie riemannienne.

L'équation (4) est la première équation aux dérivées partielles intervenant dans la discussion. C'est l'équation *eikonale*<sup>(10)</sup>. Sa résolution est seulement locale. On retrouvera cette équation plus tard, car c'est un point essentiel de l'analyse. C'est une équation de Hamilton-Jacobi. Son analyse passe par l'étude des rayons, qui sont les courbes intégrales du champ de vecteurs

$$\partial_t + c(x)\nabla\psi(x) \cdot \partial_x.$$

On retrouvera aussi ces rayons par la suite.

Un exemple : pour les ondes planes, on a  $c = \text{constante}$ .  $\psi$  est alors décrite par

$$\psi(x) = \frac{x \cdot \xi}{c}, \quad |\xi| = 1. \quad (5)$$

Ici  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  (les indices 1 et 2 ici n'ont plus rien à voir avec les différents milieux dans lesquels la lumière se propage !) et  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ . Les courbes de niveau de  $\psi$  sont des hyperplans (ici des droites), comme il se doit pour des ondes planes.

Avec l'équation eikonale, on peut revenir sur le problème de la réfraction. On a toujours un milieu de propagation rapide avec une vitesse  $c_1$  et un milieu de propagation lente avec une vitesse  $c_2$  — et ici, de nouveau, 1 et 2 désignent le milieu ! On peut encore essayer de comprendre avec un dessin (figure 7).

On dessine les petites ondelettes en chaque point atteint par l'onde incidente, dans le milieu 1 comme dans le milieu 2. Comme la vitesse de propagation est plus petite dans le milieu 2, en dessinant l'enveloppe des ondelettes, on retrouve la courbure du front d'onde. Mathématiquement, l'équation eikonale est

$$|\nabla\psi|(x) = \begin{cases} 1/c_1, & x_2 > 0, \\ 1/c_2, & x_2 < 0, \end{cases} \quad (6)$$

et  $\psi$  doit être continue à l'interface, ce qu'on exprime en disant que le saut de  $\psi$  soit être nul :

$$[\psi] = 0, \quad x_2 = 0. \quad (7)$$

---

<sup>10</sup> On écrit aussi (et on *devrait* écrire) « iconale ». Le mot provient du grec *eikon*, qui signifie « image » et qui a donné en français le mot *icône*. (N.d.R.)

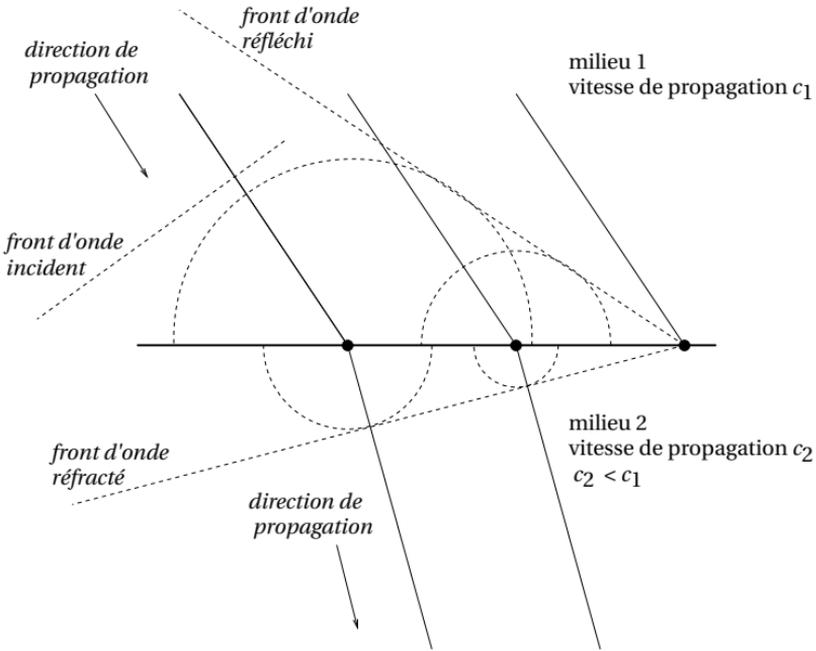


Fig. 7. Réfraction de la lumière selon Huygens.

La résolution de cette équation donne

$$\psi(x) = \begin{cases} x \cdot \xi / c_1, & |\xi| = 1, & x_2 > 0, \\ x \cdot \eta / c_2, & |\eta| = 1, & x_2 < 0. \end{cases} \quad (8)$$

En  $x_2 = 0$ , on trouve

$$\frac{\xi_1}{\eta_1} = \frac{c_1}{c_2}. \quad (9)$$

C'est une autre façon d'écrire la loi de « Snell-Fermat » (1)-(2).

Voilà pour la description de l'optique géométrique de l'époque classique. Ici, « géométrique » signifie : qui relève purement de la géométrie. Il n'y a encore aucune considération physique dans cette discussion.

## Acoustique

### L'équation de d'Alembert

À notre époque moderne, la propagation des ondes est exprimée à l'aide d'équations aux dérivées partielles. Il est plus simple de commencer par un exemple. Considérons donc l'exemple de la propagation des ondes acoustiques.

On désigne la pression, ou plutôt la différence de pression avec l'équilibre, par  $u$ . Donc  $u$  vaut zéro là où il n'y a pas de son ;  $u = u(t, x)$  dépend à la fois du temps  $t \in \mathbb{R}$  et de l'espace  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . Pour des amplitudes assez petites, l'évolution de  $u$  est donnée par l'équation de d'Alembert<sup>(11)</sup> :

$$(\partial_t^2 - c^2 \Delta) u(t, x) = 0, \quad (10)$$

où  $\Delta$  est le laplacien, opérateur différentiel d'ordre 2 :  $\Delta = \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}^2$ . L'opérateur différentiel  $\partial_t^2 - c^2 \Delta$  est appelé opérateur des ondes ou d'alembertien et est parfois noté  $\square = \partial_t^2 - c^2 \Delta$ . Enfin,  $c$  est une constante, la célérité (vitesse), qui dépend de la loi constitutive du milieu selon

$$c = \sqrt{p'(\rho)}, \quad (11)$$

où  $p$  est la densité et  $\rho$  la pression du gaz (ici, l'air). La propagation du son est donc donnée par un modèle déterministe : une équation aux dérivées partielles.

Cette présentation a d'énormes avantages par rapport aux descriptions précédentes, où il y avait des non-dits : l'existence de l'onde rétrograde dans la description de Huygens, et le fait que la résolution de (4), qui est une équation non linéaire, n'est que locale.

Avec l'équation (10) au contraire, on est dans un cadre parfaitement déterministe. On a par exemple le théorème :

**Théorème 2.** *Pour toutes données initiales  $u_0, u_1$  qui sont  $C^\infty$  à support compact (on peut aussi, de façon beaucoup plus générale, choisir comme données initiales des distributions arbitraires), il existe une unique solution de l'équation (10) avec les conditions initiales  $u(t=0) = u_0$  et  $\partial_t u(t=0) = u_1$ . De plus,  $u$  dépend de manière continue des données initiales.*

<sup>11</sup>Jean d'Alembert (1717-1783), mathématicien et philosophe français. (N.d.R.)

Donc ce que dit ce théorème, c'est que si vous connaissez l'état initial, vous connaissez l'avenir.

On sait effectuer des simulations numériques et on a des algorithmes pour calculer des solutions approchées. On peut aussi faire une analyse plus fine et, dans certains cas, calculer des solutions explicites ou décrire de « bonnes » solutions approchées par des analyses asymptotiques. On verra cela plus loin.

L'idée de la preuve d'un tel théorème repose toujours sur des inégalités. Ces inégalités sont des estimations qui portent sur les solutions de (10). Ce sont des estimations qui établissent des bornes de certaines mesures (précisément, de certaines normes) des solutions en fonction des mêmes mesures des conditions initiales. L'existence de telles estimations est raisonnable si on a une propriété de dépendance continue des solutions en fonction des données initiales. Ce qui est moins raisonnable, c'est la manière dont ces estimations sont obtenues.

Pour démontrer de telles estimations, on multiplie l'équation par quelque chose. Ici, c'est facile, on multiplie simplement l'équation par  $\partial_t u$ . Pourquoi  $\partial_t u$ ? Il y a des raisons à cela, mais on peut dire que c'est l'expérience qui nous y pousse. L'équation devient :

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} (|\partial_t u|^2 + c^2 |\nabla u|^2) \right) - c^2 \nabla \cdot (\partial_t u \nabla u) = 0. \quad (12)$$

Et si vous sumez suivant  $x$ , la contribution du deuxième terme dans (12) est nulle car ce terme est une dérivée. Vous trouvez donc que

$$\partial_t \int \frac{1}{2} (|\partial_t u|^2 + c^2 |\nabla u|^2) dx = 0. \quad (13)$$

On interprète cette égalité en disant que l'énergie est indépendante du temps : la taille de la solution (c'est-à-dire son énergie) est égale à la taille à l'instant initial. La théorie des ÉDP repose largement sur de telles estimations.

### Lien avec la construction de Huygens

Comment voir la réfraction dans ce cadre? Ce n'est pas évident. Quel est donc le lien entre les constructions géométriques de la première partie et cette description des ondes acoustiques?

Considérez à nouveau l'identité d'énergie (13). Elle montre autre chose que la conservation de l'énergie. Elle montre aussi que les signaux décrits par cette équation se propagent avec une vitesse au plus

égale à  $c$ . En effet, considérons une région de l'espace, par exemple une boule de rayon  $r$ , où les données initiales sont nulles à l'instant initial  $t = 0$ . Que trouve-t-on quand on intègre (12) sur le cône tronqué  $\mathcal{C}_{t_0}$  (voir la figure (8)) dans l'espace-temps  $(t, x)$  ?

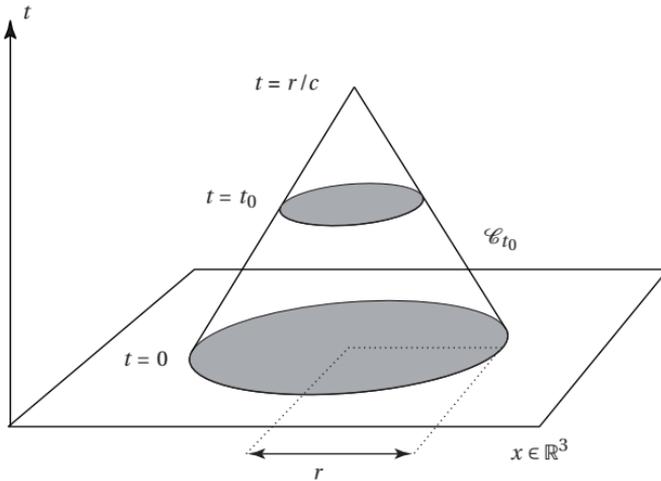


Fig. 8. Cône de lumière.

Après une intégration par parties, vous trouvez que la contribution de la surface latérale est positive ou nulle. Le cercle supérieur donne aussi une contribution positive ou nulle. Le cercle inférieur donne une contribution nulle par hypothèse. Mais la contribution totale doit être nulle, et donc l'énergie est nulle dans le cône.

L'identité d'énergie montre donc que les signaux se propagent à une vitesse finie, au plus égale à  $c$ .

Considérons maintenant le problème de la description de la propagation d'une onde qui occupe à l'instant  $t = 0$  la région de l'espace dessinée sur la figure 9. On sait que l'onde se propage au plus à la vitesse  $c$ . Considérons les points extrémaux de la région initiale et les cônes basés sur ces points dont les génératrices dans l'espace-temps  $(t, x)$  ont

une pente  $c$ . Une coupe de la réunion de ces cônes à un instant  $t = \delta t$  donne la région de l'espace qui peut être atteinte par le son à l'instant  $t = \delta t$ . On retrouve ainsi les petites ondelettes de Huygens (figure 9).

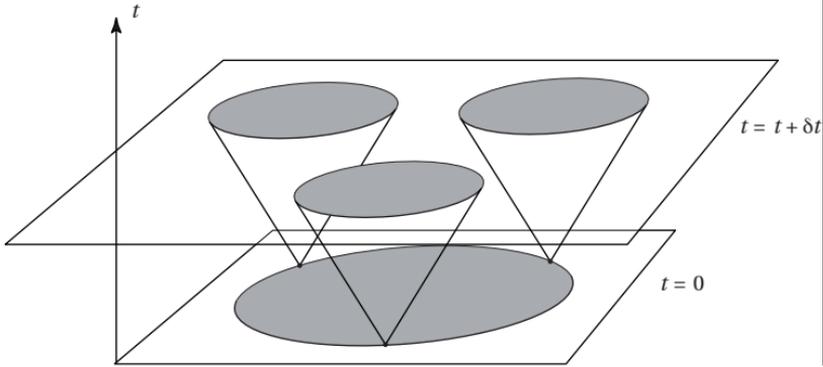


Fig. 9. Propagation de la lumière selon Huygens (2).

La construction de Huygens est donc contenue dans cette description de la propagation des ondes.

### Oscillations rapides : l'ansatz BKW

Pour avancer, il faut encore une idée. C'est une étape essentielle et pas évidente. Cette idée, c'est de regarder des ondes de petite longueur d'onde. Pourquoi? Je vous propose quelques réponses :

1. La première réponse concerne les ondes acoustiques. Dans les situations physiques, comme la propagation d'ondes acoustiques dans un amphithéâtre, la longueur d'onde des ondes acoustiques est effectivement petite devant les grandeurs caractéristiques des objets. Il est alors raisonnable de considérer la longueur d'onde comme un petit paramètre.

2. La deuxième réponse concerne la lumière. Les longueurs d'onde de la lumière sont connues, leur ordre de grandeur est celui des plus petits objets visibles par la lumière (de l'ordre du dixième de micromètre). Dans un microscope, on peut voir de très petites bactéries, comme les pneumocoques : la longueur d'onde de la lumière est de la taille d'un pneumocoque. C'est très petit!

3. Pour la troisième réponse, je vous propose un défi d'ingénierie. Ce défi, c'est de construire une solution de l'équation des ondes qui se propage de manière presque rectiligne. C'est un peu comme la guerre des étoiles, vous voulez que la lumière se propage dans une seule direction. C'est un problème intéressant. Pensez d'abord à des ondes planes solutions de l'équation des ondes :

$$\exp[i(\pm c|\xi|t + \xi \cdot x)]. \quad (14)$$

À  $t$  fixé, les surfaces de niveau de ces ondes sont des hyperplans orthogonaux à  $\xi$ .

À mon avis, il n'est pas déraisonnable de s'inspirer des ondes planes pour que les  $\xi$  soient tous à peu près orientés dans la même direction. Considérons :

$$\sum_{\pm} \int \exp[i(\pm c|\xi|t + \xi \cdot x)] \hat{a}_{\pm}(\xi) d\xi, \quad (15)$$

où  $\hat{a}_{\pm}$  est la transformée de Fourier de  $a_{\pm}$ . L'intégration porte sur les fréquences  $\xi$  qui appartiennent au support de  $\hat{a}_{\pm}$  : on les appelle les *fréquences porteuses*. Il faut penser aux  $\hat{a}_{\pm}$  comme à des bosses, des fonctions à support compact. Si on considère une translation de ces bosses d'un facteur  $\xi_0/\varepsilon$ , où  $\varepsilon$  est petit, alors les fréquences porteuses sont presque toutes alignées (voir figure 10), et donc la propagation se fait principalement dans une direction.

La manipulation qu'on vient de faire (translater la transformée de Fourier d'une fonction) correspond à multiplier la fonction par une exponentielle oscillante. On a en effet :

$$\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}(e^{ix \cdot \xi_0/\varepsilon} f)(\xi) = \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} f(\xi - \frac{\xi_0}{\varepsilon}). \quad (16)$$

En conséquence, on s'intéresse maintenant au problème :

$$\begin{cases} \square u = 0, \\ u(t=0) = a(x) \exp\left(i\left(\frac{x \cdot \xi_0}{\varepsilon}\right)\right), \\ \partial_t u(0) = b(x) \exp\left(i\left(\frac{x \cdot \xi_0}{\varepsilon}\right)\right), \end{cases} \quad (17)$$

où  $\varepsilon$  est un *petit* paramètre. Les données initiales sont donc rapidement oscillantes. En d'autres termes, leurs longueurs d'onde caractéristiques sont petites.

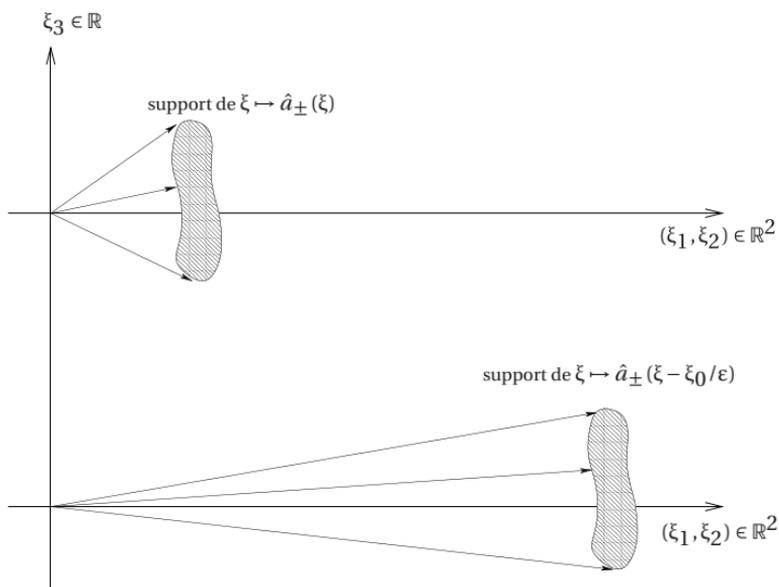


Fig. 10. Support de l'amplitude et fréquences porteuses.

Il n'était pas évident *a priori* de penser à regarder de telles données initiales pour le problème de Cauchy (17). J'espère vous avoir convaincu de leur pertinence.

Le problème de Cauchy (17) est bien posé et il n'est pas difficile d'en faire une analyse assez fine. On a déjà vu un premier outil : les estimations d'énergie. En voici un deuxième, le théorème de la phase stationnaire :

**Théorème 3.** Soit deux fonctions  $\phi$  et  $A$ , définies sur un domaine  $\Omega$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , à valeurs réelles et lisses. On suppose que  $A$  est à support compact dans  $\Omega$ , que  $\nabla\phi$  ne s'annule pas sur le support de  $A$  privé d'un point  $x_0 \in \Omega$ , et que la hessienne  $d^2\phi$  est non dégénérée au point  $x_0$ . Alors l'intégrale oscillante

$$I^\varepsilon = \int_{\Omega} \exp\left(\frac{i\phi(x)}{\varepsilon}\right) A(x) dx,$$

est décrite par le développement asymptotique

$$I^\varepsilon \sim \exp\left(\frac{i\Phi(x_0)}{\varepsilon}\right) \varepsilon^{d/2} (A_0 + \varepsilon A_1 + \dots),$$

avec

$$A_0 = \frac{A(x_0)}{\sqrt{\det d^2\Phi(x_0)}} \exp\left(i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(d^2\Phi(x_0))\right).$$

Il y a aussi des formules pour les termes suivants (dits *correcteurs*) du développement,  $A_1, A_2, \dots$  (cf. [11]). Personne ne les connaît par cœur.

On applique ce théorème à la solution exacte de (17), qui s'écrit

$$u^\varepsilon = u_+^\varepsilon + u_-^\varepsilon,$$

avec

$$u_\pm^\varepsilon = \frac{1}{2} \int e^{i\Psi_\pm(\xi_0 + \varepsilon\xi, t, x)/\varepsilon} (\widehat{a}(\xi) \pm \frac{\varepsilon}{c} |\xi_0 + \varepsilon\xi|^{-1} \widehat{b}(\xi)) d\xi,$$

et

$$\Psi_\pm(\xi, t, x) = \pm tc|\xi| + \xi \cdot x.$$

On a alors des développements

$$u_\pm^\varepsilon = \exp(i(\pm ct|\xi_0| + \xi_0 \cdot x)/\varepsilon) (a_0^\pm(t, x) + \varepsilon a_1^\pm(t, x) + \dots).$$

Il y a deux enseignements à tirer d'une telle expression.

D'abord, si on ignore les correcteurs,  $u_\pm^\varepsilon$  est simplement un terme rapidement oscillant  $e^{i(\pm t|\xi_0| + \xi_0 \cdot x)/\varepsilon}$  multiplié par un terme  $a_0^\pm$  qui au premier ordre en  $\varepsilon$  est constant sur une période des oscillations (rapides). En première approximation (c'est-à-dire au premier ordre en  $\varepsilon$ ) la solution de (17) est donc une somme de deux ondes planes avec des amplitudes « lentement » variables.

Ensuite, on en tire la forme générale des solutions avec des données initiales rapidement oscillantes :

$$e^{i\Phi/\varepsilon} (a_0 + \varepsilon a_1 + \dots), \quad (18)$$

c'est ce qu'on appelle l'*ansatz* WKB, ou BKW<sup>(12)</sup> comme vous dites en

<sup>12</sup>Des noms des physiciens Léon Brillouin (1889-1969), Hendrick Anton Kramers (1894-1952) et Gregor Wentzel (1898-1978) qui ont (indépendamment) appliqué cette méthode à l'équation de Schrödinger en 1926. La simultanéité s'explique ici par le fait que l'équation de Schrödinger venait tout juste d'être découverte et que la technique était déjà connue (elle avait été utilisée avec succès dans d'autres contextes, y compris par Brillouin lui-même 15 ans plus tôt). (N.d.R.)

France, mais il avait déjà été utilisé par Debye<sup>(13)</sup> dix-sept ans plus tôt.

Cette description des solutions (18) est d'une grande importance en optique et en analyse des ÉDP.

### Lien avec l'équation eikonale ; rayons et termes correcteurs

Testons donc cet ansatz BKW (18) en l'injectant dans l'équation de d'Alembert. L'opérateur  $\square$  fait intervenir des dérivées d'ordre 2. Avec l'exponentielle oscillante en  $1/\varepsilon$ , cela crée des termes en  $1/\varepsilon^2$ . On trouve ainsi

$$\square u^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} \left( -(\partial_t \phi)^2 + c^2 |\nabla(\phi)|^2 \right) u^\varepsilon + O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

En annulant le terme de taille  $1/\varepsilon^2$ , on trouve l'équation eikonale :

$$|\partial_t \phi|^2 - c^2 |\nabla \phi|^2 = 0.$$

Pour des phases planes  $\phi = t \pm \psi(x)$  on retrouve ainsi l'équation de Huygens

$$|\nabla \psi| = \frac{1}{c}.$$

C'est l'équation de type Hamilton-Jacobi déjà rencontrée dans la première partie.

Ensuite, si l'équation eikonale est satisfaite, on annule le terme en  $1/\varepsilon$ . Ce terme est

$$2 \frac{i}{\varepsilon} (\partial_t \phi \partial_t a_0 - c^2 \nabla \phi \cdot \partial_x a_0) + \frac{i}{\varepsilon} \square \phi a_0.$$

On voit apparaître le champ de vecteurs

$$\partial_t \phi \partial_t - c^2 \nabla \phi \cdot \partial_x, \quad (19)$$

dont les courbes intégrales sont appelées *rayons*. L'équation vérifiée par  $a_0$  est une équation différentielle le long des rayons. La valeur de  $a_0$  est fixée à l'instant initial  $t = 0$ . Après avoir trouvé  $\phi$ , solution de l'équation eikonale, la fonction  $a_0$  est donc déterminée par sa valeur en  $t = 0$ .

---

<sup>13</sup>Petrus Debye (1884-1966), physicien et chimiste néerlandais. En fait, Debye renvoie à Riemann, qui avait astucieusement adapté au domaine complexe la méthode originale, réelle, due à Laplace. (N.d.R.)

Pour la phase  $\phi = \pm c t |\xi| + x \cdot \xi$  des ondes planes, les rayons sont des lignes droites le long desquelles la vitesse de propagation est égale à  $\mp c \xi / |\xi|$ . Si on prend  $a_0$  à support près d'un point  $\underline{x}$ , et  $a_j = 0$  pour  $j > 1$ , l'amplitude  $a(\varepsilon, t, x)$  est concentrée au voisinage du rayon  $x = \underline{x} \mp c \xi / |\xi|$ . Ce type de solution de l'équation de d'Alembert est assimilable aux rayons de l'optique géométrique : ce sont elles qui relient l'équation aux dérivées partielles à l'optique géométrique de Fermat et de ses prédécesseurs.

D'une façon plus générale, les termes  $a_1, a_2, \dots$ , dits termes correcteurs, sont solutions de

$$-(2\partial_t \phi \partial_t + c^2 \nabla \phi \cdot \partial_x) + \square \phi a_j = F_j(a_0, \dots, a_{j-1}), \quad (20)$$

où les  $F_j$  sont des fonctions lisses de  $a_0, \dots, a_{j-1}$  et de leurs dérivées. On retrouve l'opérateur de transport (19). La résolution par récurrence des équations (20) (avec des conditions initiales convenables, par exemple nulles), puis le procédé de sommation de Borel, permettent alors de trouver une fonction limite  $a$  lisse dont les termes successifs du développement de Taylor en  $\varepsilon$  sont les  $a_j$  :

$$a(\varepsilon, t, x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j a_j.$$

La solution approchée est alors

$$u^\varepsilon(t, x) = \exp\left(\frac{i\phi(t, x)}{\varepsilon}\right) a(\varepsilon, t, x).$$

Elle vérifie

$$\square u^\varepsilon = r^\varepsilon = O(\varepsilon^\infty),$$

c'est-à-dire que le reste  $r^\varepsilon$  est plus petit que toute puissance de  $\varepsilon$ , plus petit au sens de la norme  $L^\infty$  des dérivées sur les compacts. On a donc une solution aussi précise qu'on veut. Plus petit que  $O(\varepsilon^\infty)$ , c'est presque impossible !

### Stabilité de la solution approchée, et récapitulation

Il y a un danger. Cette solution approchée est-elle une *bonne* solution approchée ? Le même problème intervient dans des calculs matriciels avec la question du *conditionnement* de la matrice. Ici, l'équivalent de la notion de conditionnement va être donné par les estimations d'énergie qui précèdent.

On considère donc le problème de corriger la solution approchée  $u^\varepsilon$  par la solution  $c^\varepsilon$  du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \square c^\varepsilon = -r^\varepsilon, \\ c^\varepsilon(t=0) = 0, \\ \partial_t c^\varepsilon(t=0) = 0, \end{array} \right.$$

où le terme  $r^\varepsilon$  est une petite *perturbation*, qui est précisément le reste de la solution approchée  $u^\varepsilon$ . La question de savoir si  $c^\varepsilon$  va rester petit au cours du temps est une question de *stabilité*.

Avec  $u^\varepsilon$  et  $c^\varepsilon$ , on a ainsi une solution

$$u^\varepsilon + c^\varepsilon$$

qui est une solution *exacte* du problème de Cauchy (17).

En résumé, les éléments de cette théorie sont

- a) un calcul formel,
- b) une récurrence pour calculer un développement asymptotique,
- c) une sommation à la Borel pour recoller les morceaux de la série formelle.

À la fin de ces trois étapes, on a une solution de haute précision. Et à la suite de cela, il y a donc une quatrième étape. Il faut vérifier qu'un terme correcteur ( $c^\varepsilon$  avec les notations précédentes) est petit. C'est l'étape de la stabilité. Je souligne ce point parce qu'il y a beaucoup de problèmes d'aujourd'hui et de demain pour lesquels cette étape est très délicate. Il faut faire attention à la question de la stabilité. (Les physiciens ne s'intéressent pas beaucoup aux termes correcteurs. Pourtant, si on ne prend que le terme principal dans l'approximation et qu'on calcule son d'Alembertien, on trouve un terme qui est un  $O(1)$ , du même ordre que le terme principal. Ne prendre en compte que le terme principal ne suffit pas pour obtenir un reste petit. Il est étonnant que les physiciens ne se cassent pas la figure plus souvent...)

Ce type de solution (18) est d'une importance capitale. Au-delà de leur intérêt comme solutions approchées d'équations hyperboliques comme on vient de le voir, on utilise ces solutions comme des fonctions test. Ce sont des multiplicateurs, comme  $\partial_t u$  était un multiplicateur dans (12). En faisant des produits avec de telles fonctions oscillantes, vous arrivez au théorème de propagation des singularités de Hörmander [19].

## Explication de la réfraction en acoustique

Mais je m'éloigne un peu de mon sujet, qui est l'explication du phénomène de la dispersion linéaire par le prisme.

Comment les solutions oscillantes avec de petites longueurs d'ondes expliquent le phénomène de la dispersion linéaire ?

On reprend l'expérience avec les deux milieux de vitesses  $c_1$  et  $c_2$  et on considère une phase  $\phi$  linéaire,

$$\frac{\phi}{\varepsilon} = \frac{t|\xi| + \xi \cdot x}{\varepsilon}, \quad x_2 > 0.$$

Les rayons sont des lignes droites. Vous trouvez une onde qui, à de petites corrections près, est à support dans un cylindre. Comment décrire ce qui arrive ? Il vient un moment où le cylindre coupe l'interface. L'onde dans l'espace entier est définie par deux fonctions. Les équations sont

$$\begin{aligned} \square u &= 0, & x_2 > 0, \\ [u] &= [\nabla u] = 0, & x_2 = 0, \\ \square u &= 0, & x_2 < 0. \end{aligned}$$

On a encore un brave théorème d'existence, d'unicité et de régularité pour ce problème, qui est encore basé sur une inégalité d'énergie.

On peut décrire ce qui se passe avec trois ondes BKW. Ce sont encore des solutions qui sont seulement approchées, mais avec des restes arbitrairement petits. Il y a une onde incidente, une onde réfléchie et une onde transmise dans le milieu 2. On a ainsi démontré le phénomène de réfraction et sa loi.

On a donc vu dans cette deuxième partie que dans un cadre acoustique, la loi de la réfraction est décrite par une solution de haute précision d'un problème de transmission. La solution est la somme de trois ondes BKW.

Voyons maintenant ce qu'il en est en électromagnétisme.

## Électromagnétisme

### Équations de Maxwell et équations d'ondes

Les équations de l'électromagnétisme font intervenir le champ électromagnétique  $(E, B)$ .  $E$  désigne le champ électrique et  $B$  le champ

magnétique. Ce sont des vecteurs, fonctions de  $t \in \mathbb{R}$  et de  $x \in \mathbb{R}^3$ . Dans le vide, les équations dynamiques s'écrivent :

$$\begin{aligned}\partial_t E &= \nabla \times B, \\ \partial_t B &= -\nabla \times E, \\ \nabla \cdot E &= 0, \\ \nabla \cdot B &= 0.\end{aligned}\tag{21}$$

Ce sont les équations dites de Maxwell<sup>(14)</sup>. Les deux dernières équations sont des contraintes qui portent sur les conditions initiales seulement. Elles sont satisfaites à tout instant dès qu'elles sont satisfaites à l'instant  $t = 0$ . On dit qu'elles sont propagées par les deux premières équations.

De façon plus générale, en présence de charges qui éventuellement sont en mouvement, les équations de Maxwell font intervenir une densité de charge  $\rho$  et une densité de courant  $j$ . Elles s'écrivent :

$$\partial_t E = \nabla \times B - j,\tag{22}$$

$$\partial_t B = -\nabla \times E,\tag{23}$$

$$\nabla \cdot E = \rho,\tag{24}$$

$$\nabla \cdot B = 0.\tag{25}$$

Les unités que j'ai choisies sont un peu bizarres. D'habitude, les deux premières équations font intervenir la vitesse de la lumière. J'ai effectué une renormalisation, en choisissant comme unité de distance le mètre et, comme unité de temps, le temps qu'il faut à la lumière pour parcourir un mètre. C'est l'unité de temps naturelle pour la lumière. Alors la vitesse de la lumière vaut 1.

Dans le vide, en manipulant un peu les équations<sup>(15)</sup>, on trouve l'équation d'ondes scalaire à vitesse 1 pour chacune des six composantes du champ électromagnétique :

$$\square E = 0, \quad \square B = 0.\tag{26}$$

Pour Maxwell dans le vide, il y a donc seulement une vitesse. Cela contraste avec le cas de l'acoustique où, pour une densité donnée du

<sup>14</sup>James Clerk Maxwell (1831-1879), physicien écossais. (N.d.R.)

<sup>15</sup>Appliquer l'opérateur rotationnel  $\nabla \times$  à l'équation en  $\partial_t B$ , appliquer  $\partial_t$  à l'équation en  $\partial_t E$ , puis remarquer que  $\nabla \cdot E = 0$  implique  $\nabla \times (\nabla \times E) = \Delta E$ . (N.d.R.)

milieu (disons un gaz), il y a une unique vitesse du son mais cette vitesse dépend de cette densité, sauf pour les gaz parfaits.

### Polarisation : modèle diélectrique

Pour comprendre ce qui se passe dans un prisme, on doit regarder d'un peu plus près ce qui se passe dans un matériau, l'air par exemple. Considérons un atome. C'est un truc bizarre, très petit, avec un noyau très lourd, chargé positivement, et un nuage d'électrons autour, qui est chargé négativement (figure 11). En l'absence de champ électrique, le noyau est le barycentre des charges négatives.

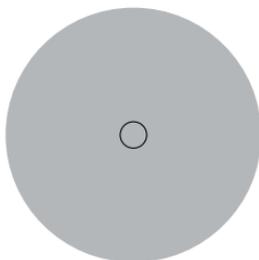


Fig. 11. Un atome.

Évidemment, la figure suggère que l'atome devrait s'effondrer sur lui-même. Le fait que cette structure soit en fait stable est expliqué par la mécanique quantique — il y a une espèce de répulsion par l'espace-temps pur qui fait que les électrons ne s'effondrent pas sur le noyau.

Que se passe-t-il en présence d'un seul champ électrique ? Considérons un champ électrique vertical  $\vec{E}$  comme sur la figure 12. Le noyau subit une force verticale dirigée vers le bas, et les électrons subissent une force verticale dirigée vers le haut. Le centre des charges positives est un peu déplacé vers le bas, et le centre des charges négatives est un peu déplacé vers le haut (figure 12).

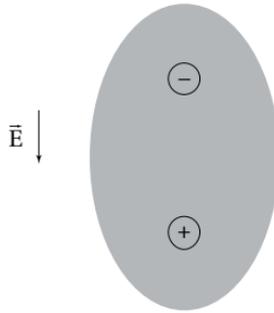


Fig. 12. Un atome sous l'effet d'un champ électrique.

On se retrouve avec un dipôle. En présence d'un champ électrique, l'atome devient donc polarisé, et il faut tenir compte, dans les équations de Maxwell, d'un troisième champ, qui est la polarisation (ou le moment dipolaire) par unité de volume  $P$ . C'est la somme de tous les petits dipôles atomiques.

Il faut aussi tenir compte du mouvement vers le bas des charges positives et du mouvement vers le haut des charges négatives. Ces mouvements créent un courant, c'est la dérivée en temps de la polarisation. Il faut donc faire figurer le terme  $\partial_t P$  là où il y a un courant dans l'équation de Maxwell, c'est-à-dire dans le membre de droite de (22). On pose  $j = \partial_t P$ , et l'équation devient :

$$\partial_t E = \nabla \times B - \partial_t P. \quad (27)$$

Et maintenant, supposons que le champ électrique varie lentement. C'est-à-dire qu'on suppose que l'échelle de temps caractéristique de variation du champ électrique est grande devant l'échelle de temps de la réponse de l'atome. Cela signifie en particulier que le mouvement des centres de charge décrit précédemment se fait avec un champ électrique à peu près constant. Le phénomène de polarisation peut être considéré comme instantané. La polarisation est alors simplement proportionnelle au champ :

$$P = \epsilon E. \quad (28)$$

On appelle *permittivité électrique* du milieu le coefficient de proportionnalité  $\epsilon$ .

Avec (27) et (23), vous avez 6 équations et 9 inconnues (3 pour chacune des composantes des champs E, B, P) ; l'équation (28) permet de clore le système. On a ainsi

$$\begin{cases} (1 + \epsilon)\partial_t E = \nabla \times B, \\ \partial_t B = -\nabla \times E. \end{cases} \quad (29)$$

(29) est encore une équation d'ondes, mais ce n'est pas la même que (26). La vitesse a en effet été modifiée par la prise en compte du courant. Mais hélas, on s'aperçoit qu'en faisant le changement d'échelle

$$\tilde{E}(t, x) = E(\lambda t, \lambda x), \quad \tilde{B}(t, x) = B(\lambda t, \lambda x), \quad (30)$$

les équations pour  $\tilde{E}$  et  $\tilde{B}$  sont les mêmes que les équations pour E et B. Donc toutes les fréquences vont se propager à la même vitesse !

Ainsi, dans un milieu diélectrique, la vitesse de propagation n'est-elle pas la même que dans le vide, mais elle ne dépend pas de la fréquence. Ce modèle n'explique donc pas la dispersion linéaire qu'on observe lorsque la lumière passe à travers un prisme.

### Polarisation oscillante et explication de la dispersion

Il faut comprendre ce qui ne va pas dans le modèle précédent. C'est parce que les équations (27), (22)-(25) et (28) ne font intervenir que des dérivées d'ordre 1 qu'elles sont invariantes par le changement d'échelle (30).

Rappelez-vous maintenant l'hypothèse sur le champ électrique : c'est parce qu'on l'a supposé lentement variable qu'on a écrit l'équation (28). Et en effet, si vous regardez des micro-ondes (c'est-à-dire des ondes électromagnétiques de longueur d'onde relativement grande, donc pas trop rapidement oscillantes), vous n'observez pas de phénomènes de dispersion linéaire. Mais dans l'expérience du prisme, quand on observe de la dispersion, on utilise de la lumière visible, donc de petites longueurs d'ondes, comme je l'ai souligné dans la première partie.

Il faut donc comprendre ce qui se passe avec un champ *rapidement* variable, c'est-à-dire avec de petites longueurs d'onde. Considérons la situation de la figure 12, c'est-à-dire un atome polarisé sous l'effet du champ. Que se passe-t-il si on éteint le champ ? Les charges positives, qui en moyenne sont en bas, et les charges négatives, qui en moyenne sont en haut, vont s'attirer. Les charges positives subissent donc une

force vers le haut et les charges négatives une force vers le bas. L'atome tend donc à retrouver sa position d'équilibre initiale (celle de la figure 11). Mais quand on arrive à cette position d'équilibre, les vitesses des centres de charge sont non nulles. L'atome subit donc une déformation dans l'autre sens, avec un centre des charges positives en haut et un centre de charge négatives en bas. À nouveau, les forces électrostatiques vont faire tendre l'atome vers sa position d'équilibre. Et ça continue comme ça. On a donc un oscillateur. Pour de petites amplitudes, cet oscillateur est linéaire. Et s'il y a très peu de pertes (c'est le cas ici), l'oscillateur est harmonique. L'équation d'évolution d'un oscillateur harmonique est

$$\partial_t^2 P + \omega^2 P = 0. \quad (31)$$

Cette équation décrit des oscillations pures. La fréquence  $\omega$  est une fréquence spectrale de l'atome. Cette fréquence est en général dans le visible ou l'ultraviolet. Les substances opaques absorbent la lumière, elles ont donc une fréquence propre dans le visible. Le verre est transparent, ses fréquences propres ne sont donc pas dans le visible, elles sont dans l'ultraviolet. La fréquence naturelle de l'atome  $\omega$  est donc dans tous les cas un grand paramètre. Mais attention ! Il faut raisonner avec l'unité de temps un peu particulière que j'ai choisie plus tôt. Si vous faites le calcul en tenant compte de ce choix, vous trouvez que  $\omega$  est de l'ordre de 100. On peut considérer que c'est un grand paramètre. On pose ensuite

$$\varepsilon = \frac{1}{\omega}$$

et  $\varepsilon$  est un petit paramètre (qu'il ne faut pas confondre avec la permittivité électrique  $\epsilon$ , que nous avons dénotée ici par un *epsilon* différent).

Dans l'équation d'évolution de  $P$  (équation (31)), il faut aussi tenir compte du champ électrique rapidement oscillant. C'est un terme source. L'équation (31) devient donc

$$\varepsilon^2 \partial_t^2 P + P = \gamma E. \quad (32)$$

C'est une équation qui décrit des oscillations forcées par le champ électrique, où  $\gamma$  est un coefficient réel.

On a donc 9 inconnues et 9 équations :

$$\partial_t E = \nabla \times B - \partial_t P, \quad (33)$$

$$\partial_t B = -\nabla \times E, \quad (34)$$

$$\varepsilon^2 \partial_t^2 P + P = \gamma E. \quad (35)$$

Quelques remarques sur ce système. D'abord, ce n'est *pas* un système homogène. Il y a des termes différentiels d'ordre 0, des termes d'ordre 1 et des termes d'ordre 2. On a évité le piège de l'homogénéité! Remarquez ensuite que c'est un système en  $\varepsilon\partial$ . En effet, en multipliant les deux premières équations (33) et (34) par  $\varepsilon$ , on fait apparaître un coefficient  $\varepsilon$  devant tous les termes comportant une dérivée. Et dans la troisième équation (35), le terme avec une dérivée d'ordre deux a un coefficient  $\varepsilon^2$ . Remarquez enfin que l'énergie est conservée. Ce n'est pas évident, mais c'est vrai. Pour le vérifier, on cherche à nouveau des multiplicateurs. On multiplie (33) par  $E$  et (34) par  $B$ . Pour le ressort, on sait bien que le multiplicateur est la dérivée en temps de  $P$ . Ici, il faut être un peu astucieux et multiplier (35) par  $(\varepsilon/\gamma)\partial_t P$ . On trouve

$$\int \left( |E|^2 + |B|^2 + \frac{1}{\gamma} (\varepsilon^2 (\partial_t P)^2 + P^2) \right) dx = \text{constante}. \quad (36)$$

Si on prend comme nouvelle inconnue le quadruplet de vecteurs :

$$u := \left( E, B, \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \varepsilon \partial_t P, \frac{1}{\sqrt{\gamma}} P \right),$$

ce que dit l'égalité (36) ci-dessus, c'est que la norme  $L^2$  de  $u$  est conservée au cours du temps.

Avec cette inconnue, on peut écrire le système sous la forme

$$L(\varepsilon\partial)u = 0, \quad (37)$$

avec

$$L(\partial) := \partial_t + \sum_{j=1}^3 A_j \partial_{x_j} + L_0,$$

avec  $A_j$  hermitienne et  $L_0$  antihermitienne, c'est-à-dire que  $L$  est un opérateur hyperbolique symétrique.

C'est la structure algébrique clef : un système en  $\varepsilon\partial$  non homogène, symétrique et conservatif.

On fait ensuite la manipulation canonique suivante : on injecte un *ansatz* BKW avec une phase plane, c'est-à-dire une solution  $u$  de la forme

$$u^\varepsilon = \exp\left(i \frac{t\tau_0 + \xi_0 \cdot x}{\varepsilon}\right) (a_0 + \varepsilon a_1 + \dots),$$

et en ordonnant les termes suivant les puissances de  $\varepsilon$ , on obtient une série formelle en  $\varepsilon$ . En annulant le coefficient d'ordre  $\varepsilon^0$  de cette série formelle, on trouve l'équation eikonale (ou *relation de dispersion*) :

$$\det L(i\tau_0, i\xi_0) = 0. \quad (38)$$

Il est essentiel de remarquer que cette équation polynomiale n'est *pas* homogène. Donc ses solutions, qui sont toutes réelles d'après les hypothèses de structures ci-dessus, ne sont *pas* des fonctions homogènes d'ordre 1.

En annulant le coefficient d'ordre  $\varepsilon^1$  de la série formelle, on trouve l'équation vérifiée par  $a_0$ . C'est l'équation de transport :

$$(\partial_t - \nabla_\xi \tau(\xi) \cdot \partial_x) a_0 = 0, \quad (39)$$

où  $\tau$  est une solution locale de l'équation eikonale qui vérifie  $\tau(\xi_0) = \tau_0$ . Comme  $\tau$  n'est pas homogène de degré 1, la vitesse de groupe  $-\nabla\tau(\xi)$  dépend de  $\xi$ , ce qui signifie que  $-\nabla\tau(\sigma\xi)$  dépend de  $\sigma$ . L'équation de transport de la lumière fait donc intervenir la fréquence : c'est le phénomène de dispersion linéaire.

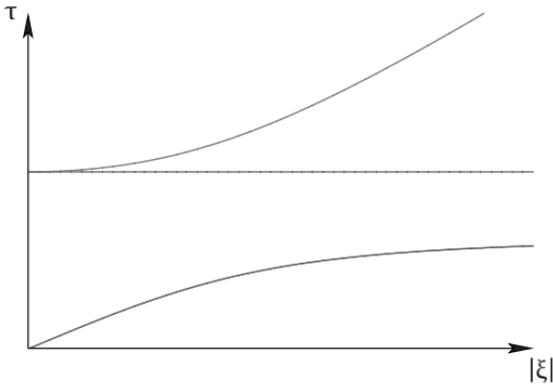


Fig. 13. Graphe des solutions de l'équation eikonale.

Pour le modèle de l'oscillateur harmonique (33)-(34)-(35), les solutions de (38) sont représentées sur la figure 13 (les solutions ne dépendent que de  $|\xi|$ , et l'ensemble des solutions est symétrique par rapport à l'axe  $\tau = 0$ ).

### Appendice : une loi « de Snell » modifiée pour le modèle des rangées de soldats

**Théorème 4.** *Considérons la réfraction des fronts d'onde prédite par le modèle des soldats décrit p. 41. Notons  $\theta_1$  l'angle d'incidence et  $\theta_2$  l'angle de réfraction, comme sur la figure 14 ci-dessous. Alors  $\theta_1$  et  $\theta_2$  satisfont la relation*

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) = n_{12}$$

où la constante  $n_{12}$  ne dépend que des milieux 1 et 2.

Cette relation diffère de la loi « de Snell » par la présence du facteur  $\cos(\theta_1 - \theta_2)$  dans le membre de gauche. Le modèle des rangées de soldats est donc incorrect pour l'optique.

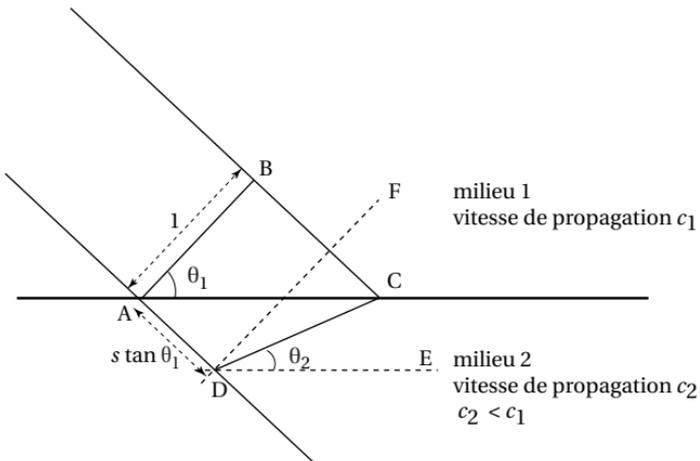


Fig. 14. Rangées de soldats.

**Preuve.** En exploitant la symétrie du problème, on peut supposer,

sans nuire à la généralité, que la propagation des signaux dans le milieu 2, situé en dessous de l'interface, se fait avec une vitesse plus lente que la propagation dans le milieu 1, au-dessus de l'interface :  $c_2 < c_1$ . Cela implique en particulier la relation  $\theta_1 > \theta_2$ .

La figure 14 représente une rangée de soldats marchant épaule contre épaule. Son angle d'incidence avec l'interface est

$$\theta_1 = \angle BAC.$$

Considérons deux soldats qui marchent à une distance  $\overline{AB} = 1$ . Le soldat dont le chemin passe par le point B arrive à l'interface au point C. Dans le triangle rectangle ABC, on a la relation

$$BC = \tan \theta_1.$$

Introduisons le quotient :

$$s = \frac{c_2}{c_1} < 1.$$

Dans l'intervalle de temps pendant lequel le soldat parcourt le trajet BC, le soldat dont le chemin passe par A se déplace dans le milieu 2, et parcourt donc la distance

$$AD = s \tan \theta_1 < BC.$$

À partir du point D, traçons la droite (DE), parallèle à (AC), et la droite (DF) parallèle à (AB). Alors,

$$\angle FDE = \theta_1 \quad \text{et} \quad \angle CDE = \angle ACD = \theta_2.$$

Par conséquent,

$$\angle FDC = \theta_1 - \theta_2 \quad \text{et} \quad \angle ADC = \frac{\pi}{2} + \theta_1 - \theta_2.$$

La loi des sinus appliquée au triangle  $\triangle ADC$  donne

$$\frac{\sin \theta_2}{s \tan \theta_1} = \frac{\sin(\pi/2 + \theta_1 - \theta_2)}{\sec \theta_1}$$

(où  $\sec \theta_1 = 1/\cos \theta_1$ , ici égal à AC). En simplifiant cette relation, on trouve la loi énoncée dans le théorème, avec  $n_{12} = c_1/c_2$ .

**Note bibliographique (N.d.R.).** La théorie mathématique rigoureuse de l'optique géométrique, telle qu'on la pratique aujourd'hui, doit

beaucoup à l'article séminal de Peter Lax [22] de 1957. C'est le point de départ de nombreuses études justifiant des approximations *hautes fréquences* de systèmes d'équations aux dérivées partielles hyperboliques. Dans les années 1990, la théorie s'enrichit des travaux importants de J. L. Joly, G. Métivier et J. Rauch, qui étudient en particulier des phénomènes non linéaires comme les résonances [14], les caustiques [15], la transparence [16]. Les articles de revue [17, 18] présentent leurs principaux résultats et contiennent une bibliographie importante ; les notes des cours de J. Rauch [25, 23] sont des textes de référence pour une introduction au sujet. Les articles de P. Donnat et J. Rauch [9, 10] fournissent une présentation claire et pédagogique du phénomène de la dispersion linéaire. À la suite de [9], l'étude de systèmes hyperboliques dispersifs donne un cadre mathématique pour de nombreuses équations modèles de l'optique et de la mécanique des fluides [3, 4]. Les mathématiques d'« aujourd'hui » étudient notamment le phénomène de rectification [17], les impulsions ultracourtes [1, 2], les régimes surcritiques [7, 6]. Il y a aussi une fertilisation mutuelle fructueuse entre l'optique géométrique et la théorie des couches limites : une bonne source est l'article [13], ainsi que sa bibliographie.

### Bibliographie

- [1] D. Alterman et J. Rauch, *Nonlinear geometric optics for short pulses*, J. Differential Equations **178** (2002), n. 2, p. 437-465.
- [2] K. Barrailh et D. Lannes, *A general framework for diffractive optics and its applications to lasers with large spectrums and short pulses*, SIAM J. Math. Anal. **34** (2002), n. 3, p. 636-674.
- [3] W. Ben Youssef et T. Colin, *Rigorous derivation of Korteweg-de Vries-type systems from a general class of nonlinear hyperbolic systems*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **34** (2000), n. 4, p. 873-911.
- [4] W. Ben Youssef et D. Lannes, *The long wave limit for a general class of 2D quasilinear hyperbolic problems*, Comm. Partial Differential Equations **27** (2002), n. 5-6, p. 979-1020.
- [5] L. Brillouin, *Remarques sur la mécanique ondulatoire*, J. Phys. Radium **7** (1926), p. 353-368.
- [6] C. Cheverry, *Propagation of oscillations in real vanishing viscosity limit*, Comm. Math. Phys. **247** (2004), n. 3, p. 655-695.
- [7] C. Cheverry, O. Guès et G. Métivier, *Oscillations fortes sur un champ linéairement dégénéré*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **36** (2003), n. 5, p. 691-745.

- [8] R. Descartes, *Dioptrique*, discours second : *De la réfraction*. Œuvres complètes (publiées par C. Adam et P. Tannery), CNRS/Vrin (Paris), 1974-1991 : vol. 6, p. 93-105.
- [9] P. Donnat et J. Rauch, *Dispersive nonlinear geometric optics*, J. Math. Physics **38** 3 (1997), p. 1484-1523.
- [10] P. Donnat et J. Rauch, *Modeling the dispersion of light*, Singularities and oscillations (Minneapolis, MN, 1994/1995), p. 17-35, IMA vol. Math. Appl. **91**, Springer, New York, 1997.
- [11] J. J. Duistermaat, *Fourier integral operators*, Progress in mathematics, vol. **130**, Birkhäuser, 1996.
- [12] P. de Fermat, Œuvres (publiées par les soins de MM. P. Tannery et C. Henri; suppl. C. de Waard), Gauthier-Villars (Paris), 1891-1922 : vol. 2, p. 457-463.
- [13] D. Gérard-Varet, *A geometric optics type approach to fluid boundary layers*, Commun. PDE **28** (2003), p. 1605-1626.
- [14] J.-L. Joly, G. Métivier et J. Rauch, *Resonant one-dimensional nonlinear geometric optics*, J. Funct. Anal. **114** (1993), n. 1, p. 106-231.
- [15] J.-L. Joly, G. Métivier et J. Rauch, *Caustics for dissipative semilinear oscillations*, Mem. Amer. Math. Soc. **144** (2000), n. 685, viii+72 pp.
- [16] J.-L. Joly, G. Métivier et J. Rauch, *Transparent nonlinear geometric optics and Maxwell-Bloch equation*, J. Differential Equations **166** (2000), n. 1, p. 175-250.
- [17] J.-L. Joly, G. Métivier et J. Rauch, *Several recent results in nonlinear geometric optics*, Partial differential equations and mathematical physics (Copenhagen, 1995; Lund, 1995), p. 181-206, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. **21**, Birkhäuser, Boston, MA, 1996.
- [18] J.-L. Joly, G. Métivier et J. Rauch, *Recent results in non-linear geometric optics*, Hyperbolic problems : theory, numerics, applications, Vol. II (Zürich, 1998), p. 723-736, Internat. Ser. Numer. Math. **130**, Birkhäuser, Basel, 1999.
- [19] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. III. Pseudo-differential operators.*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **274**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [20] H. A. Kramers, *Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung*, Z. Phys. **39** (1926), p. 828-840.
- [21] D. Lannes, *Dispersive effects for nonlinear geometrical optics with rectification*, Asymptot. Anal. **18** (1998), n. 1-2, p. 111-146.
- [22] P. D. Lax, *Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems*, Duke Math. J. **24** (1957), p. 627-645.
- [23] P. L. Moreau de Maupertuis, *Accord de différentes lois de la nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles* (1744). Œuvres, G. Olms, 1965 : vol. 4, p. 3-23.
- [24] R. Rashed, *Géométrie et Dioptrique au x<sup>e</sup> siècle (édition d'œuvres d'optique d'Ibn Sahl, al-Qūhi, Ibn al-Haytham etc. avec traduction française en vis-à-vis et notes)*, Les Belles Lettres (Paris), 1993. Éd. angl. augmentée : *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*, al-Furqân (Londres), 2005.

- [25] J. Rauch, *Lectures on geometric optics*, Hyperbolic equations and frequency interactions (Park City, UT, 1995), p. 383-466, IAS/Park City Math. Ser. 5, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [26] J. Rauch, *Lectures on Nonlinear Geometric Optics*, fichier postscript (126 pages) disponible sur : <http://www.math.lsa.umich.edu/~rauch/courses.html>
- [27] G. Wentzel, *Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik*, Z. Phys. **38** (1926), p. 518-529.